

**Prüfung aus Mathematik für Bauingenieure**  
**am 16. Juni 2009**

ZUNAME: .....  
Vorname: .....  
Kennzahl: .....  
Mat.Nr.: .....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!  
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Erklären Sie die Begriffe Eigenwert und Eigenvektor einer Matrix.
- (b) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Gleichung  $\det(A - \lambda I) = 0$  genau die Eigenwerte der Matrix  $A$  sind.
- (c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (d) Bestimmen und skizzieren Sie die Hauptachsenform der Kegelschnittlinie

$$2x^2 + 6xy + 2y^2 = 1.$$

2. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Bestimmen Sie die Lage und den Typ (Maximum oder Minimum) der Extrema der Funktion  $f(x, y) = xy$  über  $\mathbb{R}^2$  unter der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 = 1$ .
- (b) Geben Sie die Richtungsableitungen der Funktion  $f(x, y) = xy$  in den in (a) ermittelten Extrempunkten in eine Richtung Ihrer Wahl an.
- (c) Es sei  $g(x, y, z) = xy + xz + yz$  und  $S$  bezeichne die Kugel mit Radius 17 und Mittelpunkt im Ursprung. Berechnen Sie unter Verwendung eines geeigneten Integralsatzes

$$\iint_S \text{grad } g \, d\mathbf{O}.$$

4. (a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenfunktionen des Randwertproblems

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Geben Sie die Orthogonalitätsrelationen für die ermittelten Eigenfunktionen an.

- (b) Entwickeln Sie die auf  $[0, \pi]$  definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

in eine Fourierreihe bezüglich der Eigenfunktionen des Randwertproblems aus (a).

Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe von  $f$  an  $x = \frac{\pi}{2}$ ?