

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Erklären Sie die Begriffe Eigenwert und Eigenvektor einer $n \times n$ Matrix.
- (b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A .
- (c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$.

2. Bestimmen Sie Lage und Typ (Maximum/Minimum) der Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^2 e^{-y} - 1,$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 3.$$

3. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(y^2 e^{xy} + 3x^2 y) + (x^3 + (1 + xy)e^{xy})y' = 0.$$

- (a) Begründen Sie, warum diese Differentialgleichung exakt ist.
- (b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion für diese Differentialgleichung.
- (c) Geben Sie eine implizite Darstellung der Lösung dieser Differentialgleichung an, die dem Anfangswert $y(-1) = 0$ genügt.

4. Gegeben sei die Fläche $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9 - x^2 - y^2 = z, z \geq 0\}$ und das Vektorfeld

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ xy \\ xz + z^2 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie einen geeigneten Integralsatz (und formulieren Sie diesen ausführlich!) zur Berechnung von

$$\int_C \mathbf{v} d\mathbf{x},$$

wobei C die in der (x, y) -Ebene gelegene Randkurve von F bezeichnet, welche, von positiver z -Achse aus betrachtet, im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird.