Prüfung aus Mathematik 2 für BI

am 19. Juni 2018

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

Mündliche Prüfung:
☐ 27., 28. Juni ☐ 2.,3. Juli

Den genauen Termin Ihrer mündlichen Prüfung erfahren Sie am 25. Juni (TISS Aussendung).

1. Gegeben seien die Standardbasisvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ und $\boldsymbol{e}_3$ des $\mathbb{R}^3$ und die Vektoren:
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Ermitteln Sie, ob die Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ linear abhängig oder unabhängig sind.
   (b) Erklären Sie den Begriff des Ranges einer reellen Matrix A.
   (c) Es sei nun A die 3×3 Matrix, welche $A\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{b}$ und $A\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{c}$ leistet. Bestimmen Sie den Rang und die Determinante von A!
   (d) Geben Sie eine Basis des Unterraumes $U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$ an.

2. Gegeben sei die Funktion $f(x) = xe^x$.
   (a) Geben Sie Zahlen a_1, $a_0 \in \mathbb{R}$ an, sodass f eine Lösung folgender Differentialgleichung ist:
$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0.$$
   (b) Mit Hilfe der in (a) ermittelten Zahlen a_1 und a_0 bestimmen Sie nun *alle* Lösungen von
$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x).$$
   (c) Passen Sie die Lösungen aus (b) an die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ an.

3. Gegeben sei die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^2$:
$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3, x > 0, 0 \leq \frac{y}{x} \leq 1\right\}.$$
   (a) Skizzieren Sie die Menge M.
   (b) Geben Sie eine Beschreibung der Menge M in Polarkoordinaten (r, φ) an.
   (c) Bestimmen Sie die Fläche F von M durch ein Doppelintegral in Polarkoordinaten.

4. Gegeben sei das folgende Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$:
$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 2yz \\ y^2 + 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{v}$ ein Potentialfeld ist und bestimmen Sie eine Potentialfunktion für $\boldsymbol{v}$.
   (b) Bestimmen Sie (mit *oder* ohne Hilfe von (a)) den Wert des Kurvenintegrals
$$\int_C \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x},$$
   wobei C die Verbindungsstrecke von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 2, 3)$ bezeichnet.
   (c) Formulieren Sie (ausführlich) den Integralsatz von Stokes.
   Was ergibt sich für jedes geschlossene Kurvenintegral von $\boldsymbol{v}$?