Prüfung aus Mathematik 2 für Bauingenieure

am 21. Juni 2016

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

Die mündlichen Prüfungen finden am 29. und 30. Juni statt! Ihren genauen Termin erfahren Sie mit dem Ergebnis der schriftlichen Prüfung am Freitag, den 24. Juni (TISS Aussendung).

1. Gegeben sei der folgende Unterraum U des $\mathbb{R}^3$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a-b \\ 2b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (a) Geben Sie eine Basis von U an.

   (b) Bestimmen Sie einen Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, der nicht in U liegt.

   (c) Bestimmen Sie eine 3×3 Matrix A, sodass $A\boldsymbol{x} \in U$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

   (d) Geben Sie den Rang der Matrix A aus (c) an und einen Eigenvektor von A, der nicht in U liegt.

2. Bestimmen Sie ein *reelles* Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t).$$

3. Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = x^2 e^{-y} - 1.$$

   (a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f mit Entwicklungspunkt $(1,2)$. Lesen Sie daraus die Gleichung für die Tangentialebene von f im Punkt $(1,2)$ sowie deren Normalvektor ab.

   (b) Bestimmen Sie die Lage und den Typ aller Extremwerte der Funktion f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.
   Hinweis: $(\sqrt{8} - 2)e^{\sqrt{2}-1} \approx 1,25$

4. Gegeben sei das folgende Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 2yz \\ y^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{v}$ ein Potentialfeld ist und bestimmen Sie eine Potentialfunktion für $\boldsymbol{v}$.

   (b) Bestimmen Sie (mit *oder* ohne Hilfe von (a)) den Wert des Kurvenintegrals

$$\int_C \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x},$$

   wobei C die Verbindungsstrecke von $(0,0,0)$ nach $(1,2,3)$ bezeichnet.

   (c) Formulieren Sie (ausführlich) den Integralsatz von Stokes.
   Was ergibt sich für die Rotation $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ bzw. für jedes geschlossene Kurvenintegral von $\boldsymbol{v}$?