Prüfung aus Mathematik für Bauingenieure

am 25. Juni 2013

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

Mündliche Prüfung:
☐ 28. Juni ☐ 1. Juli

1. (a) Geben Sie die allgemeine Definition der Exponentialmatrix e^A einer $n \times n$ Matrix A an. Verwenden Sie die von Ihnen gegebene Definition, um zu zeigen, dass $\boldsymbol{y}(t) = e^{At}\boldsymbol{c}$ (mit $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ beliebig) eine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A\boldsymbol{y}(t)$ ist.

   (b) Bestimmen Sie speziell für
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$
   die Exponentialmatrix e^{At}.

2. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems
$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 10\cos(x), \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

3. Gegeben sei der Kreis K mit Radius 1 und Mittelpunkt in (3,3) sowie das Vektorfeld
$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ xy \end{pmatrix}.$$
   Die Gerade $y = x$ teilt den Kreis K in zwei Halbkreise (Skizze). Zeigen Sie durch direktes Nachrechnen, dass der Wert des Doppelintegrals
$$\iint_H y\,dx\,dy$$
   über den *oberen* Halbkreis H (also für $y \geq x$) mit dem Wert des Kurvenintegrals
$$\int_C \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x},$$
   wobei C die im positiven Sinn durchlaufene Randkurve von H bezeichnet, übereinstimmt.
   Formulieren Sie einen geeigneten Integralsatz, der diesen Umstand allgemeiner erklärt!

4. Bestimmen Sie für $0 \leq x \leq \pi$ und $t \geq 0$ eine Lösung des Rand-Anfangswertproblems
$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \qquad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x.$$
   Hinweis:
$$\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}, \qquad \int_0^\pi \cos^2(nx)\,dx = \frac{\pi}{2}, \qquad n \geq 1.$$