Prüfung Mathematik für BI – 26.6.2012

Name/ Matrikelnummer:...

Lösen Sie die Beispiele der Angabe entsprechend, begründen Sie Ihre Antworten, aber fassen Sie sich kurz!

Terminliches: Im Wesentlichen werden die mündlichen Prüfungen in der ersten (2.7.-6.7.) und (bevorzugt) in der zweiten (9.7.-13.7.) Juliwoche stattfinden, in dringenden (!) Ausnahmefällen (!!!) ist bereits der kommende Freitag, der 29.6., als Prüfungstermin möglich. Unverschiebbare Einschränkungen bitte hier bekannt zu geben:

☐ Ich muss am/ in der Woche vom ....geprüft werden, da ....
Ich ersuche im Sinne der Fairness von diesen Wunschterminen nur mit sehr gutem Grund Gebrauch zu machen.

---

1. Gegeben sind die (allgemeinen) quadratischen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} b & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie $Det(C) = Det(A)Det(B)$ durch geeignete Entwicklung nach Zeilen bzw. Spalten.

   (b) Wählen Sie b so, dass das lineare Gleichungssystem $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ für obige Matrix C unendlich viele Lösungen besitzt und geben Sie zumindest zwei verschiedene Lösungen des Gleichungssystems mit Ihrer Wahl von b explizit an.

   (c) Sei nun b wie in (b) so, dass $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ unendlich viele Lösungen besitzt. Begründen Sie mit der Eigenwert–Eigenvektor–Definition, dass 0 ein Eigenwert ist.

   4,5 Punkte (1,5+1,5+1,5)

2. Gegeben sei das inhomogene Differentialgleichunssystem $\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t) + \begin{pmatrix} -4+t \\ -9-3t \end{pmatrix}$.

   (a) Berechnen Sie die homogene Lösung.

   (b) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung mit der Ansatzmehode.

   4,5 Punkte (2+2,5)

3. (a) Berechnen Sie mit der richtigen Variante des Satzes von Green das Kurvenintegral $\int_C \boldsymbol{v} d\boldsymbol{x}$, wobei C die gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Randkurve des Bereichs B ist, welcher von $y = x^2$ und $y = 2x + 3$ begrenzt wird und $\boldsymbol{v} = \binom{-17x}{17x}$.

   (b) Sei $\boldsymbol{u} = \binom{u(x,y)}{v(x,y)}$ ein allgemeines Vektorfeld mit differenzierbaren Komponenten. Welche der Ausdrücke $\text{grad}(\text{rot}(\boldsymbol{u}))$, $\text{grad}(\text{div}(\boldsymbol{u}))$, $\text{rot}(\text{grad}(\boldsymbol{u}))$ und $\text{div}(\text{grad}(\boldsymbol{u}))$ sind sinnvoll? Berechnen Sie die sinnvollen Ausdrücke soweit möglich.

   (c) Berechnen Sie alle Kandidaten lokaler Extrema von $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ und überprüfen Sie, welche Kandidaten nach dem Kriterium von Leibniz tatsächlich Minima bzw. Maxima sind.

   6 Punkte(2+1+3)

4. Gegeben ist das Sturm–Liouville–Problem $y'' = -\lambda y$, $y'(0) = y'(1) = 0$, sowie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1/2), \\ 1 & \text{für } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

   (a) Weisen Sie durch Diskussion des Falles $\lambda = 0$ nach, dass die konstanten Funktionen als Eigenfunktionen $y_0(x) = c_0 \cdot 1$ dieses Falles auftreten.

   (b) Zeigen Sie durch direktes Einsetzen (!), dass für $\lambda = k^2\pi^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$, die Funktionen $y_k(x) = \cos(k\pi x)$ sowohl die Differentialgleichung als auch die Randbedingungen erfüllen.

   (c) Berechnen Sie für $k = 0, 1, 2, \dots$ die Koeffizienten c_k der Eigenfunktionen $y_k(x)$ aus (a) und (b) der Entwicklung obiger Funktion $f(x)$.
   Anmerkung: c_0 nicht vergessen! $\int_0^1 (\cos(k\pi x))^2 dx = 1/2$ kann ohne Nachrechnen verwendet werden.

   5 Punkte (1+1,5+2,5)

Viel Erfolg!