Prüfung aus Mathematik für Bauingenieure

am 27. November 2009

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Bestimmen Sie die *allgemeine* Lösung des Differentialgleichungssystems:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

2. (a) Erklären Sie den Begriff des lokalen Maximums einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

   (b) Bestimmen Sie die Extremstellen und Extremwerte von $f(x, y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $3x^2 + 4xy + 3y^2 = 1$.

   (c) Es bezeichne D den Bereich gegeben durch

   $$D := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

   Berechnen Sie das folgende Oberflächenintegral über den Rand F des Bereiches D unter Verwendung eines geeigneten Integralsatzes

   $$\iint\limits_F \begin{pmatrix} \sin y \\ 7x^2 \\ 3z \end{pmatrix} d\boldsymbol{O}.$$

3. Setzen Sie die auf dem Intervall $[0, 1)$ definierte Funktion

   $$f(x) = x^2 - x$$

   zunächst ungerade auf $[-1, 1)$ und dann periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Skizzieren Sie die so erhaltene Funktion und entwickeln Sie sie in eine (gewöhnliche) Fourierreihe.

4. Bestimmen Sie den Schwingungszustand $z(x, t), 0 \leq x \leq 1, t \in \mathbb{R}^+$ einer eingespannten Saite, die anfangs die Form

   $$z(x, 0) = x^2 - x$$

   hat und losgelassen wird.

   Anleitung: Lösen Sie durch Separation der Variablen die Schwingungsgleichung $z_{tt} = c^2 z_{xx}$, wobei $c > 0$ fest, mit den Randbedingungen $z(0, t) = z(1, t) = 0$ und den Anfangsbedingungen $z(x, 0) = x^2 - x$, $z_t(x, 0) = 0$.