Prüfung aus Mathematik für Bauingenieure

am 3. Mai 2013

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Formulieren Sie das Rangkriterium zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

   (b) Ermitteln Sie, ob das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ eine Lösung besitzt und bestimmen Sie *alle* Lösungen gegebenenfalls.

   (c) Gibt es einen Vektor $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^4$, sodass das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$ keine Lösung besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Bestimmen Sie die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y' - 2y = 17 + e^{3x}.$$

3. (a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x^5 + y^2 \\ 2xy + y^3 \end{pmatrix}$$

   ein Potentialfeld ist und bestimmen Sie eine Potentialfunktion von $\boldsymbol{v}$.

   (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der in (a) ermittelten Potentialfunktion die Lösung von

$$y'(2xy + y^3) + (x^5 + y^2) = 0, \qquad y(0) = 1.$$

   (c) Es sei C Randkurve des Kreises mit Radius 42 und Mittelpunkt in $(1, 2)$. Bestimmen Sie

$$\int_C \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}.$$

4. Gegeben sei ein Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und das auf $\mathbb{R}^3 \backslash \{\boldsymbol{o}\}$ definierte Vektorfeld

$$\boldsymbol{V}_\alpha(x, y, z) = \frac{1}{(x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie jene Werte von α für die $\operatorname{div} \boldsymbol{V}_\alpha = 0$ ist.

   (b) Es sei $\alpha = 2$ und S die Oberfläche der Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$. Bestimmen Sie durch *direkte Berechnung* das Oberflächenintegral

$$\iint_S \boldsymbol{V}_2\, d\boldsymbol{O}.$$