Prüfung aus Mathematik für Bauingenieure ZUNAME: ....

am 8. März 2013 Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

Die mündlichen Prüfungen finden am Montag, den 18. März statt.

1. Gegeben seien

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} xy \\ xy \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Erklären Sie den Begriff der *linearen Unabhängigkeit* von Vektoren.
   An welchen Stellen (x, y, z) sind $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ linear unabhängig?

   (b) Erklären Sie den Begriff des *Potentialfeldes* bzw. den einer *Potentialfunktion.*
   Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{w}$ kein Potentialfeld ist und bestimmen Sie eine Potentialfunktion für $\boldsymbol{v}$.

   (c) Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals über $\boldsymbol{v}$ vom Punkt $(1, 1, 1)$ nach $(2, 3, 4)$ bezüglich einer Kurve Ihrer Wahl.

2. Bestimmen Sie die *allgemeine* Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = e^{2x} + 4, \qquad y(0) = -1.$$

3. (a) Setzen Sie die Funktion $g(x) = |x|$ vom Intervall $[-\pi, \pi]$ periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort und entwickeln Sie diese Fortsetzung $G(x)$ in eine *gewöhnliche Fourierreihe.*

   (b) Formulieren Sie (ausführlich) den *Satz von Dirichlet.*
   Gegen welchen Wert konvergiert die Fouriereihe von G an der Stelle $x = \pi$?

4. Gegeben sei das auf $\mathbb{R}^3 \backslash \{\boldsymbol{o}\}$ definierte Vektorfeld

$$\boldsymbol{V}_\alpha(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

   wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

   (a) Bestimmen Sie jene Werte von α für die $\operatorname{div} \boldsymbol{V}_\alpha = 0$ ist.

   (b) Es sei $\alpha = 0$ und S die Oberfläche der Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$. Verwenden Sie einen geeigneten *Integralsatz* zur Bestimmung des Oberflächenintegrals

$$\iint_S \boldsymbol{V}_0 \, d\boldsymbol{O}.$$

   (c) Es sei nun $\alpha = 1$. Bestimmen Sie durch *direkte Berechnung* das Oberflächenintegral

$$\iint_S \boldsymbol{V}_1 \, d\boldsymbol{O}.$$

   (d) Bestimmen Sie jene Werte von α für die $\operatorname{rot} \boldsymbol{V}_\alpha = \boldsymbol{o}$ ist.