Prüfung aus Mathematik 2 für Bauingenieure

am 9. Oktober 2015

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

Die mündlichen Prüfungen finden am 19. und 20. Oktober statt. Ihren genauen Termin erfahren Sie mit dem Ergebnis der schriftlichen Prüfung am 15. Oktober (Aushang, Freihaus, 7. Stock, grün).

1. Es sei X die Zufallsvariable, welche die Anzahl der nötigen Würfe eines fairen Würfels angibt, die notwendig sind, um eine Drei zu erhalten.

   (a) Geben Sie eine Formel für $\mathbb{P}(X = n)$ an, also für die Wahrscheinlichkeit beim n-ten Wurf die erste Drei zu würfeln.

   (b) Geben Sie eine (einfache) Formel für $\mathbb{P}(X \leq n)$ an, also für die Wahrscheinlichkeit bis zum n-ten Wurf *mindestens* eine Drei zu würfeln. Skizzieren Sie danach die Verteilungsfunktion F_X von X im Bereich $[0, \pi]$.

   Hinweis: $\frac{5}{6} \approx 0,8333$; $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,6944$; $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,5787$; $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,4823$

   (c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ unter Zuhilfenahme der Formel $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

   (b) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems $\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t)$, welche dem Anfangswert $\boldsymbol{y}(0) = (1, 2, 0)^T$ genügt.

3. Gegeben sei die Funktion $F(x, y) = e^{x^2} y$.

   (a) Berechnen Sie die Richtungsableitung von F im Punkt $(1, 2)$ in Richtung $(-1, 0)$.

   (b) Angenommen F ist Potentialfunktion eines Vektorfeldes $\boldsymbol{v}$ und C eine Kurve, welche von $(17, 0)$ nach $(4, 2)$ verläuft. Was ist dann der Wert des Kurvenintegrals $\int_C \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}$?

   (c) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$2xye^{x^2} + e^{x^2} y' = 0$$

   exakt ist und bestimmen Sie Ihre Lösung.

4. Gegeben sei der Zylinder

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2\}.$$

   (a) Geben Sie eine Parametrisierung des Zylindermantels sowie der Deckfläche von Z an.

   (b) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ y \end{pmatrix}.$$

   durch die Deckfläche von Z.

   (c) Verwenden Sie einen geeigneten Integralsatz zur Berechnung des Oberflächenintegrals $\iint_F \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{O}$, wobei F die Randfläche von Z bezeichnet.