Prüfung aus Mathematik 2 für BI

am 28. 4. 2006

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung des elastisch gebetteten Balkens $y^{(4)} + 4y = f(x)$ unter der Last $f(x) = \cos x + \mathrm{e}^x \sin x$. Für die Partikulärlösung genügt es, den Ansatz anzuschreiben. Wie passt man die Lösung an die Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ an, und wieso ist diese Anpassung jedenfalls eindeutig möglich? Welche geometrische bzw. physikalische Bedeutung haben die vorliegenden Anfangsbedingungen?

2.) a) Lösen Sie die autonome Differentialgleichung $-y'' = y\sqrt{1+y'^2}^{\,3}$ mit den Anfangsbedingungen $y(0)=0$, $y'(0)=\infty$. Hinweis: Wie üblich zerfällt die DG. in zwei gewöhnliche DGn. erster Ordnung, wobei die erste elementar integrierbar ist. Die Lösung der zweiten kann nur als Integral der Form $x = x(y) = \int_{s=0}^{y} f(s)\,ds$ dargestellt werden. Bemerkung: Die Lösung beschreibt die Durchbiegung der linken Hälfte eines elastischen Stabes der Länge 3.7 m mit Biegesteifigkeit $EJ = 100$ Nm^2 bei Anwendung einer Kraft von $P = 100$ N und momentenfreier Lagerung an den Enden. Skizzieren Sie die Biegelinie (die rechte Hälfte ist symmetrisch zu ergänzen. Achten Sie auf die Tangenten an den Enden und in der Mitte).

b) (Zusatzpunkte) Bestätigen Sie, dass für die Lösungsfunktion $y = y(x)$ gilt $y''(x) = -\dfrac{8}{y^5}$ und berechnen Sie daraus die Krümmung am Höchstpunkt.

3.) a) Dikutieren Sie die Fläche $z = f(x,y) = x^2y + y^2$ $((x,y) \in \boldsymbol{R}^2)$. Bestimmen und skizzieren Sie den Bereich in der x-y−Ebene, über dem die elliptischen Punkte liegen. Wo liegen die parabolischen, wo die hyperbolischen Punkte? Wird die Fläche von ihrer Tangentialebene im Punkt $(0,-2,4)$ durchsetzt? Wie sieht es beim Punkt $(0,2,4)$ aus? Was ist über den Ursprung zu sagen?

b) (Zusatzpunkte) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $2xy\,dx + (x^2+2y)\,dy = 0$ exakt ist und bestimmen Sie die durch den Punkt $(0,-2)$ gehende Lösung. Was hat das in b) gestellte Problem mit a) zu tun?

4.) a) Eine Fluglinie bietet täglich einen Flug zwischen Wien und Berlin an, wofür lange im voraus gebucht werden kann. Die Anzahl X der pro Tag über Internet einlangenden Spätbuchungen ist poissonverteilt mit Parameter $\mu = 4$. Skizzieren Sie die Gewichte $p_0, \ldots, p_5$ in Balkenform über den Stellen $0, \ldots, 5$ auf der x-Achse, ferner den Verlauf der Verteilungsfunktion auf dem Intervall $[0,6]$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem bestimmten Tag

(i) mehr als drei,
(ii) eine oder zwei Spätbuchungen einlangen?

b) (Zusatzpunkte; die folgenden Fragen können zu einem guten Teil unabhängig von a) behandelt werden) An 14 Tagen wird die Anzahl der jeweils eingegangenen Spätbuchungen gezählt. Die Zufallsgröße Y, welche die Anzahl der Tage angibt, an denen mehr als drei Spätbuchungen eingehen, ist (unsymmetrisch) binomialverteilt gemäß $\mathbf{B}(14,\, p)$, wobei $p = \mathrm{P}(X > 3)$ die in a) berechnete Wahrscheinlichkeit ist. Skizzieren Sie die Gewichte $b_0, \ldots, b_4$ in Balkenform über den Stellen $0, \ldots, 4$ auf der x-Achse sowie die Verteilungsfunktion auf dem Intervall $[0,14]$. Wie groß ist $\mathrm{P}(Y > 2)$, also die Wahrscheinlichkeit dafür, daß an mehr als zwei Tagen mehr als drei Spätbuchungen eingehen? Durch welche Verteilung wird $\mathbf{B}(14,\, p)$ approximiert?

5.) a) Bestimmen Sie die Fourierreihe der Sägezahnkurve, die man durch 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $f(x) = x$ $(-\pi < x < \pi)$ erhält.

b) Welche Reihe für π^2 erhält man aus der Parsevalschen Gleichung?