Prüfung aus Mathematik 2 für BI

am 30. 6. 2006

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

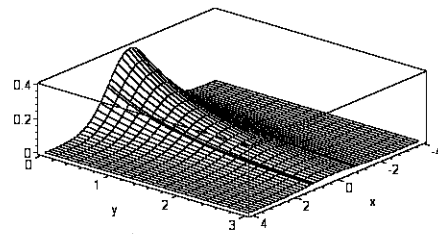
Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

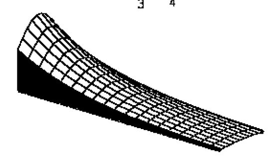
1.) a) Lösen Sie das homogene Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

mittels der Eigenwert-Eigenvektormethode.

b) Wie lautet der Ansatz für eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}e^{2x} + \boldsymbol{s}\cos(2x)$? ($\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}$ sind dabei konstante Vektoren im $\boldsymbol{R}^4$)

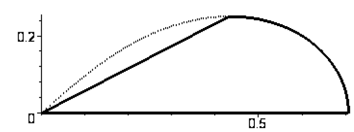
2.) a) Diskutieren Sie die Fläche $z = f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} - y}$, $(x,y) \in \boldsymbol{R} \times [0,\infty)$. Entscheiden Sie, ob es elliptische, hyperbolische oder parabolische Punkte gibt. Existieren relative oder absolute Extrema? Wie ist ein Sattelpunkt definiert? Besitzt die vorliegende Fläche einen Sattelpunkt?





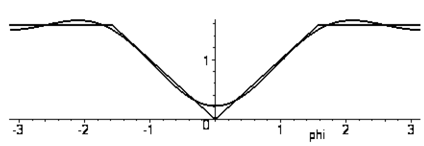
b) Berechnen Sie das Volumen unter dem Funktionsgebirge $z = f(x,y)$ auf dem Bereich $-1 \le x \le 1$, $y \ge 0$ (Am Ende benötigen Sie hier die Tabelle der Werte von Φ).

3.) Berechnen Sie den Flächeninhalt F des skizzierten Lemniskatensektors B. Die begrenzende Lemniskate hat die Gleichung $(x^2 + y^2)^2 = \frac{x^2 - y^2}{2}$. Die obere Begrenzungsstrecke verbindet den Ursprung mit dem Hochpunkt der Lemniskate und schließt mit der x-Achse den Winkel $\frac{\pi}{6}$ ein. Hinweis: Gehen Sie bei der Berechnung von $F = \iint\limits_B dx dy$ auf Polarkoordinaten über.

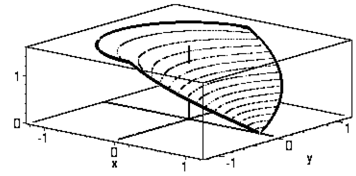


4.) Eine Stichprobe $\{3.12,\ 2.94,\ 3.02,\ 2.86\}$ stammt aus der Beobachtung einer normalverteilten Variablen mit bekannter Standardabweichung $\sigma = 0.1$. Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall für das Mittel zum Konfidenzniveau 0.95 (Auch hier benötigen Sie die Tabelle der Werte von Φ).

5.) Es sei $f(\varphi) = \begin{cases} \varphi & \text{für } 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\,, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi\,. \end{cases}$ Diese zunächst auf dem Intervall $[0,\pi]$ definierte Funktion wird erst gerade auf das Intervall $[-\pi,\pi]$ fortgesetzt (siehe Abb.).



Mit $\bar{f}$ sei die Funktion bezeichnet, die durch 2π-periodische Fortsetzung auf ganz $\boldsymbol{R}$ entsteht. Bestimmen Sie die Fourierentwicklung von $\bar{f}$ und schreiben Sie die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_8$ der Partialsumme $F_8(\varphi)$ explizit an (in der Abb. ist $F_2(\varphi)$ dargestellt). Hinweis zur Kontrolle: $a_k = \frac{2}{k^2\pi}(\cos\frac{k\pi}{2} - 1)$ $(k \in \boldsymbol{N})$; a_0 ist extra zu bestimmen.



(Zusatzpunkte: Wie lautet die Reihendarstellung der stationären Temperaturverteilung $u(\varphi, r)$ auf einem Ursprungskreis mit Radius R, wenn auf der Peripherie die Temperatur $\bar{f}(\varphi)$ aufrechterhalten wird)