Prüfung aus Mathematik 2 für BI

am 29. 9. 2006

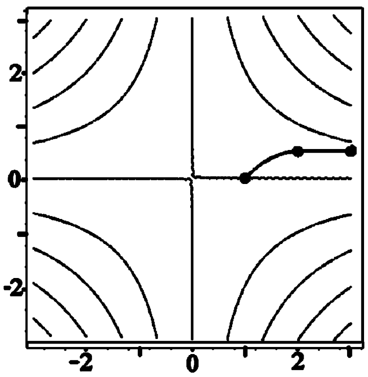
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Lösen Sie das homogene Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mittels der Eigenwert-Eigenvektormethode.

b) Wie lautet der Ansatz für eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}\mathrm{e}^t + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}t$? ($\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ sind dabei konstante Vektoren im $\boldsymbol{R}^3$)

2.) Die Differentialgleichung $y'' = -\dfrac{2y'(x - yy')}{1 + x^2 + y^2}$ hat eine zweiparametrige Lösungsschar. Insbesondere geht durch den Punkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$ genau eine Kurve, die dort die Steigung $y_0' = 1$ hat. Führen Sie zwei Schritte des Eulerschen Parabelzugverfahrens zur näherungsweisen Bestimmung dieser Kurve aus, wobei als Schrittweite $h = 1$ zu wählen ist (Die Lösungen der DG sind die Kürzesten auf der Sattelfläche $z = xy$. Die Abb. zeigt in Aufsicht den Parabelzug mit dem Anfangspunkt und den zwei zu bestimmenden Punkten).
Hinweis: Der Algorithmus beginnt mit $y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{1}{2}h^2 y_0''$, $y_1' = y_0' + hy_0''$).

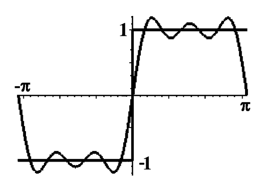


3.) a) Zeigen Sie, dass alle Punkte der Nordhalbsphäre $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $(x^2 + y^2 < 1)$ elliptisch sind (Die Rechnung wird erheblich übersichtlicher, wenn Sie für den beim Ableiten im Nenner auftretenden Wurzelausdruck abkürzend z schreiben).

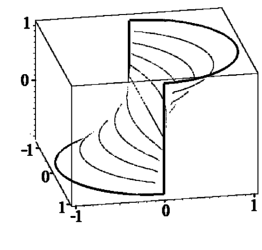
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt mit der geographischen Länge $\frac{\pi}{12}$ und der geographischen Breite $\frac{\pi}{4}$ (Das entspricht ungefähr der Lage von Rijeka).

4.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 1600 unabhängigen Würfen mit einem fairen Würfel die relative Häufigkeit des Erscheinens einer geraden Zahl von $\frac{1}{2}$ um weniger als 0.025 abweicht? Anleitung: Beim einzelnen Wurf steht $x = 1$ für das Erscheinen einer geraden Zahl (Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(x = 1) = \frac{1}{2}$) und $x = 0$ für das Komplementärereignis. Es bezeichne $s_n = x_1 + \ldots + x_n$ die Summenvariable, die zählt, wie oft eine gerade Zahl bei n Würfen erscheint, und $u_n = \frac{s_n}{n}$ die Durchschnittsvariable (also die relative Häufigkeit des Erscheinens einer geraden Zahl). Gesucht ist $\mathbf{P}(-0.025 < u_n - \frac{1}{2} < 0.025)$. Benützen Sie die Tatsache, dass u_n annähernd normalverteilt ist. Am Ende benötigen Sie die Tabelle der Werte der Standardnormalverteilungsfunktion $\Phi(z)$.

5.) a) Es sei $f(\varphi) = \begin{cases} -1 \text{ für } -\pi < \varphi < 0, \\ 1 \text{ für } 0 < \varphi < \pi. \end{cases}$ Diese zunächst auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$ definierte Funktion wird 2π-periodisch auf ganz $\boldsymbol{R}$ fortgesetzt. Bestimmen Sie die Fourierentwicklung von f und schreiben Sie die ersten 3 nichtverschwindenden Glieder explizit an (in der Abb. ist die entsprechende Partialsumme dargestellt).



b) Gewinnen Sie mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung eine Reihe für π^2.



c) Wie lautet die Reihendarstellung der stationären Temperaturverteilung $u(r, \varphi)$ auf dem Ursprungseinheitskreis, wenn auf der Peripherie die Temperatur $f(\varphi) = u(1, \varphi)$ aufrechterhalten wird?