Prüfung aus Mathematik 2 für BI

am 24. 11. 2006

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!

Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!

Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....

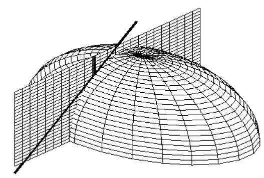
Vorname: ....

Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Das Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte -1, 2, 2 (nicht nachrechnen). Wieso kann man ohne Rechnung voraussagen, dass drei unabhängige Eigenvektoren existieren? Schreiben Sie die zugehörigen Fundamentallösungen an.

b) Wie lautet der <u>*Ansatz*</u> für eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}\,\mathrm{e}^{2t}$, wobei $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}^3$ ein konstanter Spaltenvektor ist.

2.) Gegeben sei die Fläche $z = f(x,y) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 - y^2}$ (also die obere Hälfte eines Ellipsoids mit den Halbachsen $\{2,\ 1,\ 1\}$ in Hauptlage) und der Flächenpunkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z)$. Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs und den Winkel, den die steilste Tangente dort mit der x-y−Ebene einschließt.



3.) Gegeben sei eine aus 50 Nullen und 50 Zweien bestehende Folge $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$, die aus $n = 100$ unabhängigen Beobachtungen einer normalverteilten Variablen mit unbekanntem Mittel und unbekannter Varianz stammen soll (auch wenn eine solche Stichprobe in der Praxis höchst selten vorkommen wird). Bestimmen Sie das Konfidenzintervall für die Varianz zum Konfidenzniveau $\gamma = 0.80$.

<u>Hinweis</u>: man kann die χ^2-Verteilung bei so großem Freiheitsgrad $n-1$ bereits durch die Normalverteilung mit Mittel $\mu = n-1$ und Standardabweichung $\sigma = \sqrt{2(n-1)}$ ersetzen. Die Berechnung der benötigten Fraktile lässt sich dann bekanntlich auf die entsprechenden Fraktile der Standardnormalverteilungsfunktion zurückführen).

4.) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (-\pi/2 < x < \pi/2\ ) \\ 0 & (-\pi \le x \le -\pi/2 \text{ oder } \pi/2 \le x \le \pi) \end{cases}$ (f auf $\mathbb{R}$ periodisch fortgesetzt mit Periode 2π).

a) Bestimmen Sie die Fourierentwicklung von $f(x)$ (*Ergebnis*: $\frac{1}{2\pi} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2} \frac{\sin k\pi/2}{k} \cos kx$).

b) Für welche x ist die Fourierreihe konvergent und gegen welche Werte konvergiert sie?

c) Gewinnen Sie aus der zu dieser Entwicklung gehörigen Parsevalschen Gleichung eine Reihendarstellung für π^2.

5.) Lösen Sie die Differentialgleichung des schwingenden Balkens der Länge 1 bei beidseitig gelenkiger (momentenfreier) Lagerung:

$$u_{tt} = -c^2 u_{xxxx}, \quad RB: u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0,$$

mit Separationsansatz $u(x,t) = T(t)X(x)$. Die Vorgangsweise ist weitgehend analog zur Behandlung der DG der schwingenden Saite; in der Ortsvariablen x ist dabei das Eigenwertproblem

$$X^{(4)} = \mu^4 X,\ X(0) = X(1) = X''(0) = X''(1) = 0$$

zu lösen. Wie passt man die allgemeine Lösung (im Prinzip) an die Anfangsbedingungen $u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x)$ an?