Prüfung aus Mathematik 2 für BI

am 2. 3. 2007

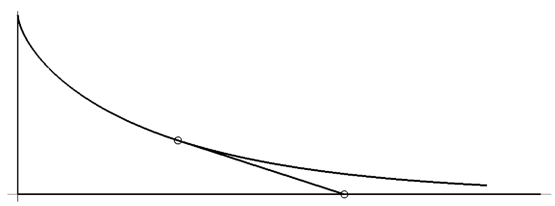
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: . . . .
Vorname: . . . .
Kennzahl / Mat.Nr.: . . . .

1.) a) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $(\lambda = 1, 1, -1)$.

b) Wie lautet der *Ansatz* für eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}\,\mathrm{e}^t + \boldsymbol{s}\,\mathrm{e}^{-t}$, wobei $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^3$ konstante Spaltenvektoren sind.

2.) Wenn die Vorderräder eines Autos entlang einer Geraden gelenkt werden, dann bewegt sich der Mittelpunkt der Hinterachse entlang einer Kurve, die durch die autonome Differentialgleichung $y'' = -\dfrac{y'}{\sqrt{1+y^2}^3}$ beschrieben ist.

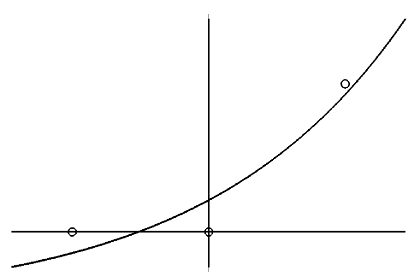


Lösen Sie diese unter folgenden Bedingungen:
(i) $x = 0 \Rightarrow y = 1$, (ii) $y \to 0 \Rightarrow y' \to 0$.

Hinweis: $-\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+y^2}^3} = -\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + c$. Passen Sie die Integrationskonstante c an die Bedingung (ii) an. Die Kurve kann nur in der Form $x = x(y)$ dargestellt werden, Auflösung nach y ist nicht möglich.

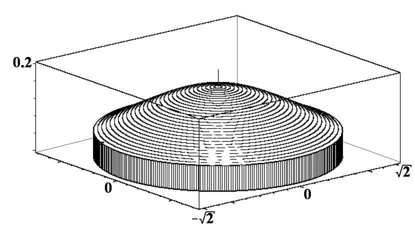
3.) Zwischen zwei Größen x, y besteht ein Zusammenhang der Form $y = a + b\mathrm{e}^x$. Bei drei Messungen werden folgenden drei Koordinatenpaare ermittelt: $(x_1, y_1) = (\ln(0.5), 0)$, $(x_2, y_2) = (0, 0)$, $(x_3, y_3) = (\ln(2), 1)$. Bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate das "optimale" Koeffizientenpaar a, b.

Zu minimieren ist also die Funktion $f(a, b) = \sum\limits_{k=1}^{3} (a + b\mathrm{e}^{x_k} - y_k)^2$.



4.) Zwei Zufallsvariable X, Y sind unabhängig standardnormalverteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $X^2 + Y^2 \leq 2$?

Hinweis: Zu berechnen ist $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2 \leq 2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy$.



5.) Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ unter den Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t)$ $(t \geq 0)$ und der Anfangsbedingung $u(x,0) = 1$ $(0 < x < 1)$ mit der Separationsmethode. Welches physikalische Problem wird dadurch beschrieben?