Prüfung aus Mathematik 2 für BI
am 20. 4. 2007
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Hinweis: $\lambda = 4$ ist ein dreifacher Eigenwert (nicht nachrechnen) mit geometrischer Vielfachheit 1.

b) Wie lautet der *Ansatz* für eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}e^{4t} + \boldsymbol{s}\cos 4t$, wobei $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^3$ konstante Spaltenvektoren sind.

2.) Bestimmen Sie diejenige Lösung der autonomen DG $yy'' = (y')^2$, die durch den Punkt $(0, 1)$ geht und dort die Steigung 2 hat.

3.) Berechnen Sie das Doppelintegral $F = \iint_B dx\,dy$, wobei der Integrationsbereich B das durch die Ungleichungen $0 \le x - y \le 3$, $0 \le x + 2y \le 3$ bestimmte Parallelogramm in der x-y−Ebene ist (F ist der Flächeninhalt von B).

Anleitung: Die Transformation $u = x - y$, $v = x + 2y$ führt B in das Quadrat $B' : 0 \le u \le 3$, $0 \le v \le 3$ über. Wenden Sie die Substitutionsregel $\iint_B dx\,dy = \iint_{B'} \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} du\,dv$ an.

4.) Im großen Dinosaurierspiel wird statt mit einem gewöhnlichen Würfel mit einem Ikosaeder "gewürfelt". Während ein Würfel als Seitenflächen sechs gleich große Quadrate hat, sind es beim Ikosaeder zwanzig gleich große gleichseitige Dreiecke, die mit den Nummern 1 bis 20 beschriftet sind und mit gleich großer Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{20}$ erscheinen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(|u - p| < \varepsilon)$ dafür, dass bei 1900 Würfen die relative Häufigkeit u des Erscheinens der Zwanzig vom Mittel $p = \frac{1}{20}$ weniger als $\varepsilon = 0.01$ abweicht.

Hinweis: Es darf wegen der großen Zahl der Würfe ohne Bedenken die approximierende Normalverteilung verwendet werden.

5.) Die Wärmeleitungsgleichung für eine quadratische Platte $Q : 0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$, deren Rand zu allen Zeiten auf der Temperatur 0^o gehalten wird, hat die Lösung

$$u(x, y; t) = \sum_{k,j=1}^{\infty} c_{kj} e^{-(k^2+j^2)c^2 t} v_{kj}(x, y).$$

Dabei sind $v_{kj}(x, y) = \sin(kx)\sin(jy)$ die Eigenfunktionen der Helmholtzgleichung $-\Delta v = \lambda v$ unter der RB. $v = 0$ auf dem Rand von Q. Diese bilden bekanntlich ein vollständiges Orthogonalsystem auf Q bezüglich des Skalarprodukts $(g, h) = \iint_Q g(x, y)\,h(x, y)\,dx\,dy$ und der dadurch erzeugten Norm.

Die Platte hat zum Zeitpunkt $t = 0$ überall die Temperatur 1^o. Passen Sie die Lösung an diese Anfangsbedingung $u(x, y; 0) = f(x, y) = 1 = const$ an (Die Koeffizienten c_{kj} sind explizit auszurechnen).