Prüfung aus Mathematik 2 für BI
am 29. 6. 2007
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Hinweis zur Kontrolle: $\lambda_{1,2} = 2$

b) Wie lautet der *Ansatz* für eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}t\mathrm{e}^{2t} + \boldsymbol{s}\mathrm{e}^{2t}\cos t$, wobei $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^2$ konstante Spaltenvektoren sind.

2.) a) Bestimmen Sie die Lösung der autonomen Differentialgleichung $s''(t) = -\sin s(t)$, die den Anfangsbedingungen $s(0) = 0$ und $s'(0) = 2$ genügt.

b) Skizzieren Sie das Feld von Linienelementen der Differentialgleichung $s' = 2\cos\left(\frac{s}{2}\right)$, und zeichnen Sie die Lösungskurve mit $s(0) = 0$ ein. Was haben die Differentialgleichungen aus a) und b) miteinander zu tun und welches physikalische Problem wird durch sie beschrieben?

3.) Geben Sie drei mathematische Fragestellungen an, bei denen positiv definite Matrizen eine zentrale Rolle spielen, und kommentieren Sie in jedem Fall den Sachverhalt anhand eines einfachen Beispiels.

4.) a) Im Rahmen einer klinischen Studie über die Wirkung eines Betablockers wird bei einer Risikogruppe von $n = 400$ Hypertonikern der Blutdruck X gemessen. Es ist davon auszugehen, dass X in dieser Gruppe normalverteilt ist. Aus den Daten ergibt sich für das empirische Mittel der Werte des systolischen Drucks $\xi = 185$ mmHg, für die empirische Varianz $s^2 = 25$. Geben Sie ein Konfidenzintervall für das Mittel μ zum Konfidenzniveau 95% an (Wegen der Größe des samples ist es zulässig, die Student-Verteilung durch die Normalverteilung zu ersetzen).

b) Erklären Sie mit wenigen Worten den theoretischen Hintergrund für die Bestimmung eines Konfidenzintervalls für das Mittel einer normalverteilten Zufallsvariablen bei bekannter Varianz.

5.) Die Wärmeleitungsgleichung für die Einheitskugel K, deren Rand ständig auf der Temperatur 0^o gehalten wird, und in der zum Zeitpunkt $t = 0$ eine radialsymmetrische (d.h. weder von φ noch von ϑ abhängige) Temperaturverteilung herrscht, hat die allgemeine Lösung

$$u(r;t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{-k^2\pi^2c^2t} v_k(r).$$

Dabei bilden die Funktionen $v_k(r) = \dfrac{\sin(k\pi r)}{r}$ ein vollständiges Orthogonalsystem auf $[0,1]$ bezüglich des Skalarprodukts $(g,h) = \int_{r=0}^{1} g(r)\,h(r)\,r^2 dr$ und der dadurch erzeugten Norm. Die Kugel hat zum Zeitpunkt $t = 0$ im Inneren überall die Temperatur 10^o. Passen Sie die allgemeine Lösung an diese Anfangsbedingung $u(r;0) = f(r) = 10 = \mathit{const}$ an (Die Koeffizienten c_k sind explizit auszurechnen).