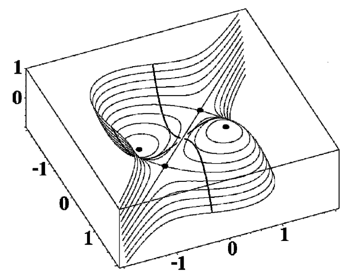
Prüfung aus Mathematik 2 für BI
am 12. 10. 2007
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

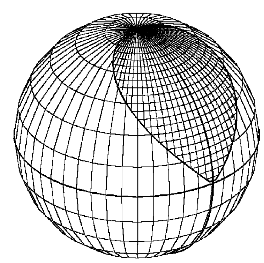
1.) a) Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ lauten $0, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$, der einzige zum Doppeleigenwert 0 gehörige Eigenvektor ist $\boldsymbol{u} = (-1, 0, 1, 0)^t$ (Nicht nachrechnen). Geben Sie zwei zum Eigenwert 0 gehörige Fundamentallösungen des Differentialgleichungssystems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ an.

b) Wie lautet der <u>Ansatz</u> für eine Partikulärlösung des Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}e^{\sqrt{2}t}$, wobei $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^4$ konstante Spaltenvektoren sind.

2.) Diskutieren Sie ausführlich die Fläche $z = f(x, y) = x + y - x^3 - y^3$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Über welchen Bereichen der x-y−Ebene liegen elliptische bzw. hyperbolische Punkte, über welchen Kurven liegen die parabolischen Punkte? Bestätigen Sie, dass es zwei Sattelpunkte, ein relatives Minimum und ein relatives Maximum gibt. Existieren absolute Extrema auf $\mathbb{R}^2$?

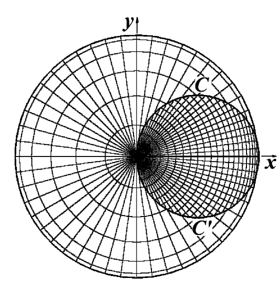


3.) a) Die rechte Randkurve C auf der Einheitssphäre in der Abildung besteht aus allen Punkten, deren nördliche geographische Breite β $(= \pi/2 - \vartheta)$ mit ihrer östlichen geographischen Länge φ übereinstimmt, die linke Randkurve C' besteht aus den Punkte mit $\beta = -\varphi$, entsteht also durch Spiegelung von C an der x-z−Ebene. Berechnen Sie den Inhalt $J = \iint\limits_B \|\boldsymbol{N}\| d\varphi\, d\beta$ des von den beiden Kurven berandeten sphärischen Bereichs B.



<u>Hinweis</u>: Unter Verwendung der Parameter β, φ wird die Einheitssphäre durch $x = \cos\varphi \cos\beta$, $y = \sin\varphi \cos\beta$, $z = \sin\beta$ parametrisiert, die von C und dem Nullmeridian berandete Hälfte von B ist durch $0 \le \varphi \le \pi/2$, $\varphi \le \beta \le \pi/2$ beschrieben.

b) Bestätigen Sie, dass durch Normalprojektion von B auf die x-y−Ebene die in Aufsicht dargestellte Kreisscheibe mit der Polardarstellung $\rho \le \cos\varphi$ $(-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2)$ entsteht, es handelt sich bei B also um das Vivianische Fenster.



4.) Geben Sie drei Fragestellungen an, bei denen die Gaußsche Normalverteilung eine zentrale Rolle spielt, und kommentieren Sie in jedem Fall den Sachverhalt anhand eines einfachen Beispiels. Begründen Sie ferner die Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit, eine gemäß $\mathbf{N}(\mu, \sigma)$ verteilte Variable x bei zufälliger Beobachtung unterhalb von z anzutreffen, durch $\mathbf{P}(x \le z) = \Phi(\frac{z-\mu}{\sigma})$ gegeben ist. Weshalb ist diese Beziehung so nützlich? Wie heißt generell die Funktion $F(z) = \mathbf{P}(x \le z)$?

5.) Bestimmen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl den Schwingungszustand $z(x, t)$ einer beidseitig eingespannten Saite der Länge 1, die anfangs die Form $z(x, 0) = f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x & (\;0 < x < 1/2) \\ 1 - x & (1/2 < x < \;1) \end{array} \right\}$ hat und dann losgelassen wird (Anfangsgeschwindigkeit $z_t(x, 0) = g(x) = 0$).