Prüfung aus Mathematik (2) für BI

am 23. Nov. 2007

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Lösen Sie das Randwertproblem $y^{(4)} + 4y = 1$, RB : $y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0$.
Hinweis zur Kontrolle: $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_4\} = \{1 + \mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}, -1 + \mathrm{i}, -1 - \mathrm{i},\}$. Es ist die allgemeine Lösung $y_{inhom} = y_{hom} + y_{part}$ anzugeben und das lineare Gleichungssystem hinzuschreiben, das sich durch die Anpassung an die Anpassung an die RB. ergibt (nicht lösen!)
b) Wie lautet der Partikuläransatz für die inhomogene DG. $y^{(4)} + 4y = x^2 \mathrm{e}^x \sin x$?

2.) a) Gegeben sei die Fläche $z = f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2}$. Geben Sie die Tangentialebene und das Schmiegparaboloid zweiten Grades $p_2(x, y)$ im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$ an, und überzeugen Sie sich, dass $p_2(x, y)$ mit $f(x, y)$ zusammenfällt.
b) Bestätigen Sie, dass der Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$ hyperbolisch ist. Entlang welcher beiden Kurven wird die Fläche von der Tangentialebene durchsetzt?

3.) Gegeben seien die drei Punkte $\boldsymbol{a} = \binom{1}{-1}$,$\boldsymbol{b} = \binom{1}{1}$, $\boldsymbol{c} = \binom{-1}{1}$. Bestimmen Sie den Punkt $\boldsymbol{x} = \binom{x}{y}$, für welchen die Abstandsquadratsumme

$$f(x, y) = f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\|^2$$

minimal wird. Welcher besondere Punkt ist $\boldsymbol{x}$ im Dreieck mit den Ecken $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$?

4.) Es sei $\mathcal{F}$ die Fläche mit der Parametrisierung $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{x^2 - y^2}{2} \end{pmatrix}$, $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Berechnen Sie den Inhalt $\mathcal{O}$ des Flächenstücks über dem Kreis $K:\ x^2 + y^2 \leq 1$ mit Hilfe der Oberflächenformel $\mathcal{O} = \iint\limits_K \|\boldsymbol{N}\|\, dx\, dy$ (Hinweis: Übergang zu Polarkoordinaten).

5.) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \ldots -\varepsilon < x < \varepsilon \\ 0 & \ldots -\pi \leq x \leq -\varepsilon \text{ oder } \varepsilon \leq x \leq \pi \end{cases}$

($0 < \varepsilon < \pi$; f periodisch fortgesetzt auf ganz $\boldsymbol{R}$) in eine Fourierreihe. Was ist über die Amplituden der beteiligten Oberschwingungen zu sagen, wenn ε sehr klein ist?