Prüfung aus Mathematik 2 für BI

am 9. 1. 2008

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....

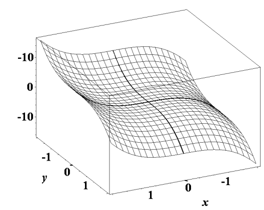
Vorname: ....

Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Lösen Sie das homogene Differentialgleichungssystem $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ mit der Eigenwert-Eigenvektormethode.

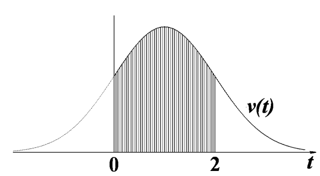
b) Wie lautet der Partikuläransatz für das inhomogene System $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \sin t$?

2.) Diskutieren Sie die Fläche $z = f(x,y) = x^3 - y^3$. In welchen Bereichen der x-y−Ebene besteht die Fläche aus elliptischen bzw. hyperbolischen bzw. parabolischen Punkten? Wird die Fläche in den parabolischen Punkten von ihrer Tangentialebene durchsetzt?



3.) Rechnen Sie nach, dass die Funktionen $u(x,y) = x^2 - y^2$ und $v(x,y) = 2xy$ konjugiert harmonisch sind, also den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen. Zeichnen Sie die Äquipotentiallinien $\{(x,y) \mid u(x,y) = c\}$ für die Parameterwerte $c = 0.5, 1, 2$ sowie die Stromlinien $\{(x,y) \mid v(x,y) = k\}$ für die Parameterwerte $k = 0.5, 1, 2$. Kommentieren Sie den mathematischen Hintergrund der Tatsache, dass die beiden Kurvenscharen aufeinander senkrecht stehen.

4.) Über ein Modem werden Daten mit der zeitabhängigen Geschwindigkeit $v(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(t-1)^2}{2}}$ [Einheit: GB/min] von einem Server auf einen PC überspielt.
Welche Datenmenge wird im Zeitintervall $0 \le t \le 2$ [min] heruntergeladen? (Geben Sie das Resultat auf drei Dezimalstellen genau an). Die nebenstehende Graphik zeigt das Schaubild von $v(t)$. Die gesuchte Datenmenge ist gleich dem Inhalt der schraffierten Fläche.



5.) a) Ein Stab der Länge 1 ist an der Oberfläche isoliert und wird an beiden Enden auf konstanter Temperatur 0° gehalten. Bestimmen Sie den Temperaturverlauf $u(x,t)$, wobei die Anfangstemperaturverteilung durch $u(x,0) = f(x) = 1 = \text{const}$ $(0 < x < 1)$ gegeben sei. Zu lösen ist also die Wärmeleitungsgleichung $u_t = c^2 u_{xx}$ mit den Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$ und der AB $u(x,0) = f(x) = 1$ mittels Separationsansatz.

b) Die Abbildung zeigt die Lösungslandschaft $z = u(x,t)$ über dem Bereich $0 < x < 1$, $0 < t < 0.4$ für den Parameterwert $c = 1$. Interpretieren Sie die Bedeutung der beiden fett eingezeichneten Kurven.