Prüfung aus Mathematik 2 für BI

am 7. 3. 2008

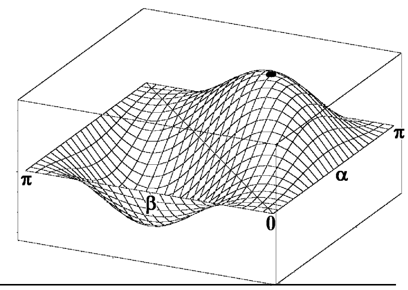
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Lösen Sie das homogene Differentialgleichungssystem $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit der Eigenwert-Eigenvektormethode.

b) Wie lautet der Partikuläransatz für das inhomogene System $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t \cos t$?

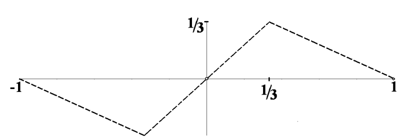
2.) Bestimmen Sie dasjenige Dreieck, für welches die Funktion $f(\alpha, \beta) = \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\alpha - \beta)$ $(0 \leq \alpha \leq \pi,\ 0 \leq \beta \leq \pi)$ ein Maximum annimmt.



3.) Rechnen Sie nach, dass die Funktion $v(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$ harmonisch ist und bestimmen Sie den zu $v(x, y)$ konjugiert harmonischen Zwilling $u(x, y)$ unter Heranziehung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Zeichnen Sie die Stromlinien $\{(x, y) \mid v(x, y) = \alpha\}$ für die Parameterwerte $\alpha = \frac{k\pi}{3}$, $k = -2, -1, 0, 1, 2$, sowie die Äquipotentiallinien $\{(x, y) \mid u(x, y) = c\}$ für vier Parameterwerte c Ihrer Wahl. Kommentieren Sie den mathematischen Hintergrund der Tatsache, dass die beiden Kurvenscharen aufeinander senkrecht stehen.

4.) Es ist von der Annahme auszugehen, dass Mädchen und Knaben mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit geboren werden (Mehrlingsgeburten werden ignoriert). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit w dafür, dass bei 100 Geburten insgesamt mindestens 55 Mädchen auftreten? Approximieren Sie die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung und veranschaulichen Sie in einer Skizze die Größe w durch eine Fläche unter der Dichtekurve der entsprechenden Normalverteilung. Sie können die Tabelle auf der Rückseite des Angabeblatts heranziehen.

5.) a) Geben Sie die d'Alembertsche Lösung der Schwingungsgleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ für eine an den Enden $x = 0$ und $x = 1$ eingespannte Saite der Länge 1 an, die bei $x = \frac{1}{3}$ gezupft und dann losgelassen wird. Die obere Abbildung zeigt die durch $f(x) = x$ $(0 \leq x \leq \frac{1}{3})$, $f(x) = \frac{1-x}{2}$ $(\frac{1}{3} \leq x \leq 1)$ beschriebene Anfangsform $u(x, 0) = f(x)$ für $0 \leq x \leq 1$ und ihre ungerade Fortsetzung auf das Intervall $[-1, 1]$.



b) Die strichlierte Kurve in der unteren Abbildung zeigt für die Wahl $c = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ die Form $u(x, \frac{1}{6})$ der Saite nach $\frac{1}{6}$ sec. Zeichnen Sie die Form $u(x, \frac{1}{3})$ zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{3}$ sec.