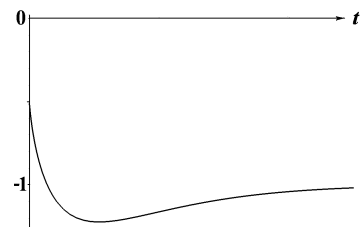
Prüfung aus Mathematik 2 für BI

am 25. 4. 2008

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

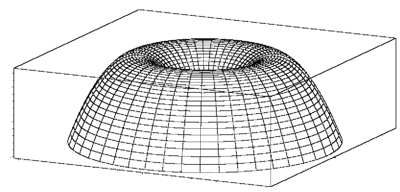
1.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y'' - y = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-t}}$.



Anleitung: Die Störfunktion läßt sich für $t > 0$ als Summenfunktion der geometrischen Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-kt} = 1 + \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t} + \ldots$ auffassen (wieso?). Man erhält also eine Partikulärlösung $y_p(t)$, indem man mit der Ansatzmethode die zu den Störfunktionen $f_k(t) = \mathrm{e}^{-kt}$ gehörigen Partikulärlösungen $y_{p_k}(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ bestimmt und aufsummiert.
Behandeln Sie die Fälle $k = 0$, $k = 1$ und $k \geq 2$ getrennt, und beachten Sie, dass bei $k = 1$ Resonanz besteht! (Die Abb. zeigt das Schaubild der Partikulärlösung y_p, insbesondere erkennt man das Grenzverhalten $y_p(t) \to y_{p_o}(t)$ bei $t \to \infty$)

2.) a) Es sei $z = f(x, y) = g(r)$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$ eine Rotationsfläche (dabei sei $g(r)$ auf einem Intervall $r_1 < r < r_2$ zweimal stetig differenzierbar). Bestätigen Sie durch wiederholte Anwendung der Kettenregel die Formel

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = \frac{g'(r)g''(r)}{r} \quad (r \in (r_1, r_2)).$$



b) (kann unabhängig von a) behandelt werden) In welchen Bereichen der x-y-Ebene besteht die Rotationsfläche $z = f(x, y) = r - r^2$ $(r > 0)$ aus elliptischen bzw. hyperbolischen bzw. parabolischen Punkten? Von welchem Typ sind insbesondere die Punkte $(-\frac{1}{3}, 0, z)$, $(0, \frac{1}{2}, z)$ und $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, z)$?

Hinweis: Verwenden Sie die in a) angegebene Formel, durch die das Problem auf die Diskussion der Kurve $z = g(r)$ zurückgeführt ist.

3.) Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie $\displaystyle\int_{y=0}^{4} \int_{x=\sqrt{y}}^{2} \cos\left(\frac{\pi x^3}{16}\right) dx dy$

4.) In einem kleinen Baumarkt gibt es zwei Kassen, vor denen sich stets eine Schlange bildet. Es ist davon auszugehen, dass die Wartezeiten unabh. normalverteilt sind, und zwar vor der einen Kasse gemäß $\mathbf{N}(\mu = 4,\ \sigma = 0.4)$ und vor der anderen gemäß $\mathbf{N}(\mu = 4,\ \sigma = 0.3)$ (Zeiteinheit: 1 Minute). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Differenz der beiden Wartezeiten größer als eine Minute ist? Zur Beantwortung kann die Tabelle auf der Rückseite des Angabeblatts herangezogen werden.

5.) a) Lösen Sie mit der Separationsmethode die Wärmeleitungsgleichung $u_t = c^2 \Delta u(x, y; t)$ für eine quadratische Platte der Seitenlänge 1, die auf der Ober- und Unterseite isoliert ist und deren Rand auf der konstanten Temperatur 0° gehalten wird.

b) (kann unabhängig von a) behandelt werden)
Passen Sie die Lösungsreihe $u(x, y; t) = \sum\limits_{k,j=1}^{\infty} c_{kj}\, \mathrm{e}^{-\pi^2 (k^2 + j^2)\, c^2\, t} \sin(k\pi x) \sin(j\pi y)$ an die Anfangstemperaturverteilung $u(x, y; 0) = f(x, y) = 1$ an.