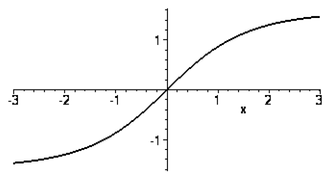
Prüfung aus Mathematik (2) ALT für BI
am 1. 3. 2005
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Das Differentialgleichungssystem $\begin{array}{rcl}\dot{x} &=& -x+y \\ \dot{y} &=& -x-y\end{array}$ $(\lambda = -1 \pm i)$ beschreibt zwei phasenversetzt schwingende Massen mit Dämpfung. Lösen Sie es mit der Eigenwert-Eigenvektormethode. Geben Sie die allgemeine komplexe sowie die allgemeine reelle Lösung $(x(t), y(t))$ an. Was ist über das Verhalten der Auslenkungen $x(t)$, $y(t)$bei $t \to \infty$ zu sagen?

b) Wie lautet der <u>*Ansatz*</u> für eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems $\begin{array}{rcl}\dot{x} &=& -x+y+\mathrm{e}^{-t}\cos t \\ \dot{y} &=& -x-y\end{array}$?

2.) Bestimmen Sie die Kurve $y = y(x)$, die der Differentialgleichung $y'' = -y' \sin y$ genügt, durch den Ursprung geht und dort die Steigung 1 hat.

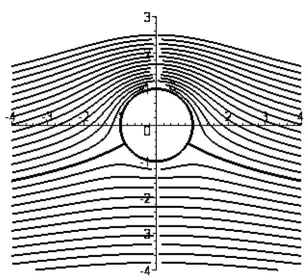


3.) a) Wie lauten die Isoklinen der Differentialgleichung $y' = \dfrac{2y}{x}$? Skizzieren Sie einige dieser Isoklinen im ersten Quadranten und die entsprechenden Linienelemente. Bestimmen Sie die Lösungsschar der DG durch Exaktmachen der Differentialgleichung $2y dx - x dy = 0$ und geben Sie die durch den Punkt $(1,1)$ gehende Lösungskurve an (Hinweis zur Kontrolle: Es ergibt sich $y = x^2$)

b) Kann unabhängig von a) behandelt werden) Führen Sie zwei Schritte des Eulerschen Polygonzugverfahrens durch (Start bei $(x_0, y_0) = (1,1)$, Schrittweite $h = 0.1$), und vergleichen Sie das Resultat mit dem richtigen Wert $y(1.2)$.

4.) a) In der Vorlesung wurde die im Äußeren des Einheitskreises analytische Funktion $w = u + \mathrm{i}\,v = c\,\mathrm{i} \ln z + \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ untersucht. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Stromlinien $v =$ konst an. Diese beschreiben die Strömung um einen von links mit Einheitsgeschwindigkeit angeströmten und mit Peripheriegeschwindigkeit c rotierenden Kreiszylinder.

b) Die Abb. zeigt die Situation für $c = \frac{1}{2}$. Berechnen Sie die Koordinaten des linken Staupunkts. (Hinweis: für $|c| \leq 1$ ergeben sich die Staupunkte als Schnittpunkte der Kurve $v = 0$ mit dem Einheitskreis.



5.) Lösen Sie die Schwingungsgleichung $z_{tt} = c^2 z_{xx}$ für eine an beiden Seiten eingespannte Saite der Länge 1 (RB: $z(0,t) = z(1,t) = 0,\ t \geq 0$) mit folgenden Anfangsbedingungen:

Anfangsform $z(x,0) = 0$,

Anfangsgeschwindigkeit $z_t(x,0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & \text{für } x \in [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon], \\ 0 & \text{für } x \in [0,1] \setminus [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon]. \end{cases}$

Prüfung aus Mathematik (2) NEU für BI Zuname: ....

am 1. 3. 2005 Vorname: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen! Kennzahl / Mat.Nr.: ....

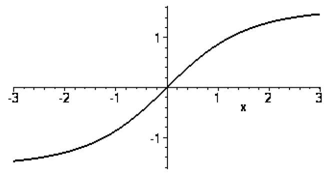
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!

Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Das Differentialgleichungssystem $\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& -x+y \\ \dot{y} &=& -x-y \end{array}$ $(\lambda = -1 \pm i)$ beschreibt zwei phasenversetzt schwingende Massen mit Dämpfung. Lösen Sie es mit der Eigenwert-Eigenvektormethode. Geben Sie die allgemeine komplexe sowie die allgemeine reelle Lösung $(x(t), y(t))$ an. Was ist über das Verhalten der Auslenkungen $x(t)$, $y(t)$bei $t \to \infty$ zu sagen?

b) Wie lautet der <u>*Ansatz*</u> für eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems $\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& -x+y+\mathrm{e}^{-t}\cos t \\ \dot{y} &=& -x-y \end{array}$?

2.) Bestimmen Sie die Kurve $y = y(x)$, die der Differentialgleichung $y'' = -y' \sin y$ genügt, durch den Ursprung geht und dort die Steigung 1 hat.

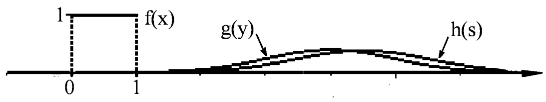


3.) a) Wie lauten die Isoklinen der Differentialgleichung $y' = \dfrac{2y}{x}$? Skizzieren Sie einige dieser Isoklinen im ersten Quadranten und die entsprechenden Linienelemente. Bestimmen Sie die Lösungsschar der DG durch Exaktmachen der Differentialgleichung $2ydx - xdy = 0$ und geben Sie die durch den Punkt $(1,1)$ gehende Lösungskurve an (Hinweis zur Kontrolle: Es ergibt sich $y = x^2$)

b) Kann unabhängig von a) behandelt werden) Führen Sie zwei Schritte des Eulerschen Polygonzugverfahrens durch (Start bei $(x_0, y_0) = (1,1)$, Schrittweite $h = 0.1$), und vergleichen Sie das Resultat mit dem richtigen Wert $y(1.2)$.

4.) a) Die Wartezeiten x und y an zwei aufeinanderfolgenden Ampeln seien unabhängig und folgendermaßen verteilt: Die Dichte der Verteilung von x ist gegeben durch $f(x) = 1$ für $x \in [0,1]$ und $f(x) = 0$ außerhalb dieses Intervalls, die Variable y ist normalverteilt mit Mittel 4 und Varianz 1, ihre Verteilung hat also die Dichte $g(y) = \varphi(y-4)$, wobei $\varphi(t)$ die Dichte der Standardnormalverteilung ist. Berechnen Sie die Dichte $h(s)$ der Verteilung der Gesamtwartezeit $s = x + y$ durch Faltung $h = f * g$ (Hinweis zur Kontrolle: Es ergibt sich $h(s) = \Phi(s-4) - \Phi(s-5)$, wobei $\Phi(z)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet).

b) (Kann unabhängig von a) behandelt werden). Wie lautet das Mittel und die Varianz der Verteilung von s? Bestimmen Sie unter Verwendung der Tabelle auf der Rückseite die Werte $h(4.5)$, $h(5.5)$, $h(6.5)$.



5.) Lösen Sie die Schwingungsgleichung $z_{tt} = c^2 z_{xx}$ für eine an beiden Seiten eingespannte Saite der Länge 1 (RB: $z(0,t) = z(1,t) = 0$, $t \geq 0$) mit folgenden Anfangsbedingungen:

Anfangsform $z(x,0) = 0$,

$$\text{Anfangsgeschwindigkeit } z_t(x,0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & \text{für } x \in [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon], \\ 0 & \text{für } x \in [0,1] \setminus [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon]. \end{cases} .$$