Prüfung aus Mathematik (2) ALT für BI
am 2. 12. 2005
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ mit der Eigenwert-Eigenvektor-Methode (Hinweis: Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = (\lambda - 1)^3$).

b) Wie lautet der Ansatz für das inhomogene System $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}\mathrm{e}^x + \boldsymbol{s}\sin x$, wobei $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{s}$ konstante Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind.

2.) a) Lösen Sie die Indexgleichung für die DG $v''(\rho) + \frac{2}{\rho}v'(\rho) + \mu^2 v(\rho) = 0$

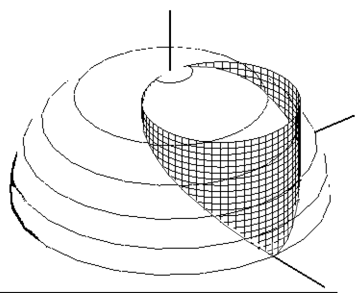
b) Bringen Sie die DG auf Sturm-Liouvillesche Form und lesen Sie die Gewichtsfunktion $r(\rho)$ ab.

c) Bestätigen Sie durch Nachrechnen, dass $\left\{\frac{\sin \mu\rho}{\rho}, \frac{\cos \mu\rho}{\rho}\right\}$ ein Fundamentalsystem ist.

d) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_k = \mu_k^2$ und Eigenfunktionen $v_k(\rho)$ unter den Randbedingungen $|v(0)| < \infty$, $v(R) = 0$.Wie lauten die Orthogonalitätsrelationen für die $v_k(\rho)$?

3.) Berechnen Sie das Doppelintegral $P = \iint\limits_B p\, q\, \mathrm{e}^{-px-qy}\, dxdy$ über den Bereich $B : 0 \le x \le ry,\ y \ge 0$ $(p, q, r > 0)$, und bestätigen Sie, dass P für jedes feste Paar (p, q) bei $r \to \infty$ gegen 1 geht.

4.) Es bezeichne B den dreidimensionalen Schnitt des Zylinders $Z : (x-\frac{1}{2})^2+y^2 = \frac{1}{4},\ z \in \boldsymbol{R}$ mit der Nordhalbkugel $K : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0$.
Berechnen Sie den Rauminhalt von B.



5.) (Fortsetzung des Beispiels 2, kann aber unabhängig davon gelöst werden)
Durch $u(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(\rho)\mathrm{e}^{-k^2\pi^2c^2t}$ ist die (nichtstationäre) radialsymmetrische Temperaturverteilung in einer Kugel mit Radius $R = 1$ bei Randtemperatur $u(1, t) = 0$ beschrieben. Dabei sind die Funktionen $\{v_1, v_2, \ldots, v_k = \frac{\sin k\pi\rho}{\rho}, \ldots\}$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle g, h\rangle = \int_0^1 g(\rho)h(\rho)\rho^2 d\rho$ paarweise orthogonal und bilden ein vollständiges Funktionensystem auf $[0, 1]$.

Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k, die sich bei einer vorgeschriebenen Anfangstemperaturverteilung $u(\rho, 0) = 1$ (=const) ergeben.

Prüfung aus Mathematik (2) NEU für BI
am 2. 12. 2005

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ mit der Eigenwert-Eigenvektor-Methode (Hinweis: Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = (\lambda - 1)^3$).

b) Wie lautet der Ansatz für das inhomogene System $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}\mathrm{e}^x + \boldsymbol{s}\sin x$, wobei $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{s}$ konstante Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind.

2.) a) Lösen Sie die Indexgleichung für die DG $\;v''(\rho) + \dfrac{2}{\rho}v'(\rho) + \mu^2 v(\rho) = 0$

b) Bringen Sie die DG auf Sturm-Liouvillesche Form und lesen Sie die Gewichtsfunktion $r(\rho)$ ab.

c) Bestätigen Sie durch Nachrechnen, dass $\left\{\dfrac{\sin\mu\rho}{\rho}, \dfrac{\cos\mu\rho}{\rho}\right\}$ ein Fundamentalsystem ist.

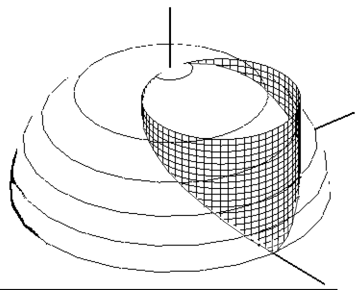
d) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_k = \mu_k^2$ und Eigenfunktionen $v_k(\rho)$ unter den Randbedingungen $|v(0)| < \infty$, $v(R) = 0$.Wie lauten die Orthogonalitätsrelationen für die $v_k(\rho)$?

3.) Bei einem Callcenter gehen Telephonate an zwei Hotlines A und B ein. Die Abstände X zwischen aufeinanderfolgenden Telephonaten bei A sind exponentialverteilt mit Dichte $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ $(x \geq 0)$, die Abstände Y bei B sind exponentialverteilt mit Dichte $h(y) = 2\mathrm{e}^{-2y}$ $(y \geq 0)$. Man kann davon ausgehen, dass die Variablen unabhängig sind.

a) Bestätigen Sie, dass g und h tatsächlich Dichtefunktionen sind, skizzieren Sie ihre Schaubilder, und berechnen Sie das Mittel ξ von X und η von Y (Hinweis zur Kontrolle: die Wartezeiten bei A sind im Schnitt länger als bei B)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit w dafür, dass die Wartezeit bei A kleiner als die bei B ist, also den Wert $w = \mathbf{P}(x \leq y) = \iint\limits_B g(x)h(y)\,dxdy$ über den Bereich $B: 0 \leq x \leq y,\ y \geq 0$ (Hinweis zur Kontrolle: da man bei A "in der Regel" länger wartet als bei B, ergibt sich für w ein Wert kleiner als $\frac{1}{2}$).

4.) Es bezeichne B den dreidimensionalen Schnitt des Zylinders $Z: (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4},\ z \in \boldsymbol{R}$ mit der Nordhalbkugel $K: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0$. Berechnen Sie den Rauminhalt von B.



5.) (Fortsetzung des Beispiels 2, kann aber unabhängig davon gelöst werden)
Durch $u(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(\rho)\mathrm{e}^{-k^2\pi^2c^2t}$ ist die (nichtstationäre) radialsymmetrische Temperaturverteilung in einer Kugel mit Radius $R = 1$ bei Randtemperatur $u(1, t) = 0$ beschrieben. Dabei sind die Funktionen $\{v_1, v_2, \ldots, v_k = \dfrac{\sin k\pi\rho}{\rho}, \ldots\}$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle g, h\rangle = \int_0^1 g(\rho)h(\rho)\rho^2 d\rho$ paarweise orthogonal und bilden ein vollständiges Funktionensystem auf $[0, 1]$.

Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k, die sich bei einer vorgeschriebenen Anfangstemperaturverteilung $u(\rho, 0) = 1$ $(= \mathrm{const})$ ergeben.