Prüfung aus Mathematik 2 für BI
am 3. 3. 2006
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y(t) + t \\ \dot{y}(t) &= x(t) \end{aligned}$

2.) a) Bestimmen Sie die Extremstellen der quadratischen Form $f(x, y) = x^2 + y^2$ auf der durch eine positiv definite Form $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ bestimmten Ellipse.

b) (kann unabhängig von a) gelöst werden). Dasselbe für die konkrete Ellipse $q(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 = 1$. Wenn Sie bei Ihrer Rechnung bemerken, in welchem Zusammenhang die Lagrangeschen Multiplikatoren mit den Eigenwerten stehen, haben Sie damit einen Hinweis auf die Behandlung von a).

3.) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment T der mit Masse der Dichte 1 belegten Einheitssphäre $S\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bezüglich einer Achse durch den Mittelpunkt. Hinweis: $T = \iint\limits_S (x^2 + y^2)\, dO$

4.) Jemand legt im Rahmen einer Studie Audiodateien an, die auf USB-Sticks mit 100 MB Speicherplatz gesichert werden. Der Speicherplatz, den eine Datei benötigt, sei eine (genau genommen diskrete, praktisch aber kontinuierliche) Zufallsgröße X, die normalverteilt ist mit Mittel $\mu = 1\,\mathrm{MB}$ und Streuung $\sigma = 0{,}05$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf einem USB-Stick $n = 99$ Dateien Platz haben?

Anleitung: Zu betrachten ist die Summenvariable $S = X_1 + \ldots + X_n$, wobei die Summanden X_i unabhängig und gemäß $\mathbf{N}(\mu, \sigma)$ verteilt sind. Bekanntlich ist dann auch S normalverteilt. Zunächst sind also Mittel $\bar{\mu}$ und Streuung $\bar{\sigma}$ dieser neuen Normalverteilung $\mathbf{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma})$ anzugeben, und dann ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(S \leq 100)$ zu berechnen.

5.) a) Bestimmen Sie die Eigenfunktionen des Randwertproblems $-(y'' + 2y' + y) = \lambda y$, $y(0) = y(1) = 0$. Dabei treten nur positive Eigenwerte auf, Sie können also gleich mit $\lambda = \mu^2$ rechnen.

Hinweis zur Kontrolle: Die Eigenfunktionen lauten $y_k(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin(k\pi x)$ $(k \in \boldsymbol{N})$.

b) (kann unabhängig von a) gelöst werden) Durch Multiplikation mit e^{2x} wird aus der obigen Aufgabe das Sturm-Liouvillesche Randwertproblem $-[(\mathrm{e}^{2x}y')' + \mathrm{e}^{2x}y] = \mu^2 \mathrm{e}^{2x} y$ mit der auf der rechten Seite ablesbaren Gewichtsfunktion $r(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Berechnen Sie die Koeffizienten c_k in der Entwicklung $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k y_k(x)$ der Funktion $f(x) = 1$ (= const).

Hinweis zur Kontrolle: $c_k = \dfrac{2k\pi(1 - (-1)^k \mathrm{e})}{1 + k^2\pi^2}$.