.

Prüfung aus Mathematik (2) ALT für BI

am 28. 1. 2005

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ lauten $0, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ (Braucht nicht nachgerechnet zu werden). Bestimmen Sie die zwei zum Doppeleigenwert 0 gehörigen Fundamentallösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$ mit der Eigenwert-Eigenvektormethode.

b) Wie lautet der <u>*Ansatz*</u> für eine Partikulärlösung des Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}\,t + \boldsymbol{s}\,\cosh(t\sqrt{2})$, wobei $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^4$ konstante Spaltenvektoren sind.

2.) Welche Punkte der Fläche $z = e^{-xy}$ sind elliptisch, welche hyperbolisch, welche parabolisch? (Skizzieren Sie die betreffenden Bereiche in der $\{x, y\}-$Ebene).

3.) Berechnen Sie das (statische) Moment $M = \iint\limits_K y\, dxdy$ für den oberhalb der x-Achse liegenden Teil des Innengebiets der Kardioide $r = 1 + \cos\varphi$. Anleitung: Übergang auf Polarkoordinaten; der Parameterbereich von K ist gegeben durch $0 \le r \le 1 + \cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi$.

4.) Gegeben sei das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} z - y \\ x - z \\ y - x \end{pmatrix}$.

a) Überzeugen Sie sich, daß dieses die Strömung einer inkompressiblen Substanz beschreibt.

b) Berechnen Sie den Durchsatz pro Zeiteinheit durch den im positiven Oktanten liegenden Teil D der Ebene $x + y + z = 1$, also das Oberflächenintegral $\iint\limits_D \mathbf{u}\, d\mathbf{O}$.

Anleitung: $D = \{\mathbf{x} = (x, y, 1 - x - y) :\ 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le x \le 1\}$.

c) Welche von den Ausdrücken div div, div grad, div rot, grad div, grad grad, grad rot, rot div, rot grad, rot rot sind sinnvoll, welche sinnlos? Schreiben Sie auf, was Sie über die sinnvollen wissen.

5.) Lösen Sie die Schwingungsgleichung $z_{tt} = c^2 z_{xx}$ für eine links eingespannte, rechts frei schwingende Saite der Länge 1 mit folgenden Rand- und Anfangsbedingungen:

$$\begin{array}{llcll} RB: & z(0,t) & = & z_x(1,t) = 0 & (t \ge 0), \\ AB: & z(x,0) & = & 0 & (0 \le x \le 1) \quad \ldots \text{ Anfangsform} \\ & z_t(x,0) & = & x & (0 \le x \le 1) \quad \ldots \text{ Anfangsgeschwindigkeit} \end{array}$$

Prüfung aus Mathematik (2) NEU für BI
am 28. 1. 2005
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ lauten $0, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ (Braucht nicht nachgerechnet zu werden). Bestimmen Sie die zwei zum Doppeleigenwert 0 gehörigen Fundamentallösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$ mit der Eigenwert-Eigenvektormethode.

b) Wie lautet der <u>*Ansatz*</u> für eine Partikulärlösung des Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}\,t + \boldsymbol{s}\,\cosh(t\sqrt{2})$, wobei $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^4$ konstante Spaltenvektoren sind.

2.) Welche Punkte der Fläche $z = e^{-xy}$ sind elliptisch, welche hyperbolisch, welche parabolisch? (Skizzieren Sie die betreffenden Bereiche in der $\{x, y\}-$Ebene).

3.) Berechnen Sie das (statische) Moment $M = \iint\limits_K y\; dxdy$ für den oberhalb der x-Achse liegenden Teil des Innengebiets der Kardioide $r = 1+\cos\varphi$. Anleitung: Übergang auf Polarkoordinaten; der Parameterbereich von K ist gegeben durch $0 \le r \le 1 + \cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi$.

4.) a) Wenn man von Wien nach einer bestimmten fernöstlichen Stadt fliegen will, so kann man zwischen den Angeboten der großen Fluggesellschaften Airfrance, Airtrance und dem Kleinunternehmen Airgeiz wählen, dessen Flieger $m = 50$ Plätze hat. Wir wollen annehmen, dass sich $n = 180$ Kunden beim Ticketkauf unabhängig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$ für eine der drei Gesellschaften entscheiden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Flieger von Airgeiz ausgebucht ist? (Überzählige Kunden sind kein Problem, sie werden einfach an die anderen Anbieter verwiesen).

Anleitung: Die Wahrscheinlichkeit, dass sich k Kunden für Airgeiz entscheiden, ist gleich dem Gewicht b_k der Binomialverteilung $B(n,p)$. Zu bestimmen ist also die Wahrscheinlichkeit $P(k \ge m) = \sum_{k=m}^{n} b_k$, die durch $F(m) = \int_{x=m}^{\infty} f(x)\,dx$ ausreichend angenähert wird, wobei $f(x)$ die Dichte der Normalverteilung ist, die dasselbe Mittel und dieselbe Varianz hat wie $B(n,p)$. Sie können die Berechnung von $F(m)$ auf die auf der Rückseite tabellierten Werte der Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standardnormalverteilung zurückführen.

5.) Lösen Sie die Schwingungsgleichung $z_{tt} = c^2 z_{xx}$ für eine links eingespannte, rechts frei schwingende Saite der Länge 1 mit folgenden Rand- und Anfangsbedingungen:

$$\begin{array}{llll} RB: & z(0,t) = z_x(1,t) = 0 & (t \ge 0), & \\ AB: & z(x,0) = 0 & (0 \le x \le 1) & \ldots \text{ Anfangsform} \\ & z_t(x,0) = x & (0 \le x \le 1) & \ldots \text{ Anfangsgeschwindigkeit} \end{array}$$