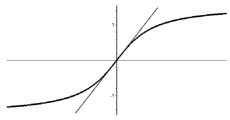
Prüfung aus Mathematik (2) ALT für BI
am 29. 4. 2005
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y^{(4)} + y = 0$? Geben Sie ein komplexes und ein reelles Fundamentalsystem an.

b) Wie lautet der _Ansatz_ für eine Partikulärlösung der inhomogenen DG $y^{(4)} + y = 1 + e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}$?
Welches statische Problem wird durch eine DG der Form $y^{(4)} + \omega^2 y = f(x)$ beschrieben?

2.) Bestimmen Sie die Kurve $y = y(x)$, die der Differentialgleichung $y'' = -2y' \sin y \cos y$ genügt, durch den Ursprung geht und dort die Steigung 1 hat.



3.) a) Gegeben seien die 3 Geraden $\left\{\begin{array}{llcccccc} g_1 & \ldots & x & & & - & 3 & = 0 \\ g_2 & \ldots & & & y & - & 3 & = 0 \\ g_3 & \ldots & \frac{x}{\sqrt{2}} & + & \frac{y}{\sqrt{2}} & - & \frac{3}{\sqrt{2}} & = 0 \end{array}\right\}$. a) Bestimmen Sie die Ausgleichslösung $\boldsymbol{x}^*$, also den Punkt, für den $\boldsymbol{d}^2 = (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})^2 = \sum_{i=1}^{3} d_i^2 = \sum_{i=1}^{3} (a_{i1}x + a_{i2}y - b_i)^2$ minimal wird.

b) (kann unabhängig von a) gelöst werden) Mit welchen Skalierungsfaktoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ muss man die Geradengleichungen multiplizieren, damit $\boldsymbol{x} = (2,\, 2)$ als Ausgleichslösung herauskommt?

4.) a) Ein Bereich B mit Volumen V werde durch die geschlossene Randfläche S begrenzt, und $\boldsymbol{x}$ bezeichne den vom Ursprung ausgehenden Radiusvektor. Bestätigen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes die Beziehung $3V = \iint_S \boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{S}$. Verwenden Sie diese Formel (welche ein dreidimensionales Analogon zur Leibnizschen Sektorformel darstellt), um für die dreidimensionale Kugel mit Radius R die Volumsformel $V = \frac{4R^3\pi}{3}$ herzuleiten (Hinweis: Die Punkte der Sphäre S haben die Koordinaten $x = R\cos\varphi \sin\vartheta, y = R\sin\varphi\sin\vartheta, z = R\cos\vartheta$).

5.) Ein Stab der Länge 1 wird im Inneren gleichmäßig aufgeheizt. Die eingebrachte Wärmemenge kann nur an den beiden Enden $x = 0$ und $x = 1$ abfließen, die auf konstanter Temperatur 0° gehalten werden. Es stellt sich ein Fließgleichgewicht ein, wobei die Temperatur $u = u(x)$ durch das Randwertproblem $(Au :=) - u'' = f(x) \equiv 1,\;\; u(0) = u(1) = 0$, beschrieben ist.

a) Rechnen Sie nach, dass $u(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$ die exakte Lösung ist, und skizzieren Sie ihr Schaubild.

b) Berechnen Sie die Ritzapproximierenden $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)$ für $u(x)$ unter Verwendung des Systems der Eigenfunktionen φ_k des Randwertproblems $A\varphi = \lambda\varphi,\;\; \varphi(0) = \varphi(1) = 0$ (Bekanntlich ist $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ein bezüglich des Energieskalarprodukts und der Energienorm vollständiges Orthogonalsystem auf dem Intervall $[0,1]$). Skizzieren Sie das Schaubild der Approximierenden $s_1(x)$, die bereits eine ausgezeichnete Näherung von $u(x)$ liefert.

c) freiwillig (Zusatzpunkte): Wie geht man vor, wenn man für eine quadratische Platte mit Seitenlänge 1 das analoge Randwertproblem $-\Delta u(x,y) = f(x,y) \equiv 1$ mit der Randbedingung $u|_S = 0$ (Dirichletsche RB auf dem Rand S) zu lösen hat?

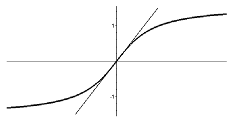
Prüfung aus Mathematik (2) NEU für BI
am 29. 4. 2005
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y^{(4)} + y = 0$? Geben Sie ein komplexes und ein reelles Fundamentalsystem an.

b) Wie lautet der *Ansatz* für eine Partikulärlösung der inhomogenen DG $y^{(4)} + y = 1 + \mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}$?
Welches statische Problem wird durch eine DG der Form $y^{(4)} + \omega^2 y = f(x)$ beschrieben?

2.) Bestimmen Sie die Kurve $y = y(x)$, die der Differentialgleichung $y'' = -2y' \sin y \cos y$ genügt, durch den Ursprung geht und dort die Steigung 1 hat.



3.) a) Gegeben seien die 3 Geraden $\left\{\begin{array}{lcccccc} g_1 \dots & x & & & - & 3 & = 0 \\ g_2 \dots & & & y & - & 3 & = 0 \\ g_3 \dots & \frac{x}{\sqrt{2}} & + & \frac{y}{\sqrt{2}} & - & \frac{3}{\sqrt{2}} & = 0 \end{array}\right\}$. a) Bestimmen Sie die Ausgleichslösung $\boldsymbol{x}^*$, also den Punkt, für den $\boldsymbol{d}^2 = (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})^2 = \sum_{i=1}^{3} d_i^2 = \sum_{i=1}^{3} (a_{i1}x + a_{i2}y - b_i)^2$ minimal wird.

b) (kann unabhängig von a) gelöst werden) Mit welchen Skalierungsfaktoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ muss man die Geradengleichungen multiplizieren, damit $\boldsymbol{x} = (2,\ 2)$ als Ausgleichslösung herauskommt?

4.) Von einer Marssonde werden Messdaten als Folgen von 0-1-Signalen verschlüsselt und in Blöcken zu je $n = 2^{10}$ Einzelsignalen (im folgenden als (Dual-) "Ziffern" bezeichnet) zur Erde gesandt. Eine Ziffer wird auf dem Funkweg mit Wahrscheinlichkeit $p = 2^{-13}$ beschädigt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Block ganz unbeschädigt ankommt?

b) Ein Block ist beim Empfang auf der Erde unbrauchbar, wenn mindestens zwei seiner Ziffern beschädigt sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Block unbrauchbar ist?
Arbeiten Sie bei a) und b) mit den Gewichten der Poissonverteilung mit Parameter $\mu = np$.

c) (kann unabhängig von a, b gelöst werden) Berechnen Sie die Varianz und skizzieren Sie die Gewichte $p_0, \dots, p_3$ der Poissonverteilung mit Parameter $\mu = \frac{1}{8}$.

5.) Ein Stab der Länge 1 wird im Inneren gleichmäßig aufgeheizt. Die eingebrachte Wärmemenge kann nur an den beiden Enden $x = 0$ und $x = 1$ abfließen, die auf konstanter Temperatur 0° gehalten werden. Es stellt sich ein Fließgleichgewicht ein, wobei die Temperatur $u = u(x)$ durch das Randwertproblem $(Au :=) - u'' = f(x) \equiv 1,\ \ u(0) = u(1) = 0$, beschrieben ist.

a) Rechnen Sie nach, dass $u(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$ die exakte Lösung ist, und skizzieren Sie ihr Schaubild.

b) Berechnen Sie die Ritzapproximierenden $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$ für $u(x)$ unter Verwendung des Systems der Eigenfunktionen φ_k des Randwertproblems $A\varphi = \lambda\varphi,\ \ \varphi(0) = \varphi(1) = 0$ (Bekanntlich ist $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ ein bezüglich des Energieskalarprodukts und der Energienorm vollständiges Orthogonalsystem auf dem Intervall $[0,1]$). Skizzieren Sie das Schaubild der Approximierenden $s_1(x)$, die bereits eine ausgezeichnete Näherung von $u(x)$ liefert.

c) freiwillig (Zusatzpunkte): Wie geht man vor, wenn man für eine quadratische Platte mit Seitenlänge 1 das analoge Randwertproblem $-\Delta u(x,y) = f(x,y) \equiv 1$ mit der Randbedingung $u|_S = 0$ (Dirichletsche RB auf dem Rand S) zu lösen hat?