Prüfung aus Mathematik (2) ALT für BI

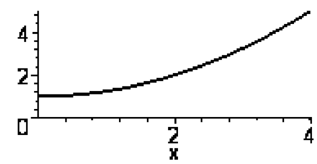
am 30. 6. 2005

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y^{(4)} - y = 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

2.) Bestimmen Sie die Kurve $y = y(x)$, die der Differentialgleichung $y'' = \dfrac{1 + y'^2}{2y}$ genügt, durch den Punkt $(0, 1)$ geht und dort eine waagrechte Tangente hat (Hinweis zur Kontrolle: $y(x) = 1 + \frac{1}{4}x^2$).



3.) a) Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{-y}{r^2} \\ \dfrac{x}{r^2} \end{pmatrix}$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$. Bestätigen Sie, dass auf $G = \boldsymbol{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ gilt $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, und rechnen Sie nach, dass das Kurvenintegral $\oint_C \boldsymbol{u} d\boldsymbol{x}$ über den Ursprungseinheitskreis C nicht verschwindet.

b) Das Resultat aus a) zeigt, dass $\boldsymbol{u}$ auf G nicht konservativ ist. Geben Sie ein möglichst großes Teilgebiet $\widetilde{G}$ von G an, auf dem $\boldsymbol{u}$ konservativ ist, und bestimmen Sie eine Potentialfunktion auf $\widetilde{G}$.

c) Berechnen Sie die Divergenz $\operatorname{div} \boldsymbol{u}$ auf G. Welche Konsequenz hat das Resultat für den Durchsatz pro Zeiteinheit durch eine (einfach) geschlossene Kurve in $\widetilde{G}$, wenn man $\boldsymbol{u}$ als Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Substanz auffasst?

4.) a) Wählen Sie den reellen Parameter b so, dass die Differentialgleichung $u_{xx} - 2bu_{xy} + u_{yy} - u_x + u_y = 0$ parabolisch wird (es gibt zwei Möglichkeiten), und versuchen Sie dann, eine möglichst allgemeine Lösung anzugeben.

5.) Welche Art von Flächenpunkten besitzt die Fläche $z = z(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$? (Anregung: Begründen Sie, dass die Funktion $z(x, y)$ harmonisch ist.

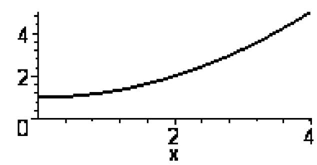
Prüfung aus Mathematik (2) NEU für BI
am 30. 6. 2005

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y^{(4)} - y = 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

2.) Bestimmen Sie die Kurve $y = y(x)$, die der Differentialgleichung $y'' = \dfrac{1+y'^2}{2y}$ genügt, durch den Punkt $(0,1)$ geht und dort eine waagrechte Tangente hat (Hinweis zur Kontrolle: $y(x) = 1 + \frac{1}{4}x^2$).



3.) a) Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{-y}{r^2} \\ \dfrac{x}{r^2} \end{pmatrix}$ $(r = \sqrt{x^2+y^2})$. Bestätigen Sie, dass auf $G = \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, und rechnen Sie nach, dass das Kurvenintegral $\oint_C \boldsymbol{u} d\boldsymbol{x}$ über den Ursprungseinheitskreis C nicht verschwindet.

b) Das Resultat aus a) zeigt, dass $\boldsymbol{u}$ auf G nicht konservativ ist. Geben Sie ein möglichst großes Teilgebiet $\widetilde{G}$ von G an, auf dem $\boldsymbol{u}$ konservativ ist, und bestimmen Sie eine Potentialfunktion auf $\widetilde{G}$.

c) Berechnen Sie die Divergenz $\operatorname{div} \boldsymbol{u}$ auf G. Welche Konsequenz hat das Resultat für den Durchsatz pro Zeiteinheit durch eine (einfach) geschlossene Kurve in $\widetilde{G}$, wenn man $\boldsymbol{u}$ als Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Substanz auffasst?

4.) a) Eine Firma erzeugt Lackdraht für die Bewicklung von Spulen für Elektromotoren. Durch unvermeidliche Fabrikationsfehler ist der Draht an einzelnen Stellen blank, was zu Kurzschlüssen zwischen verschiedenen Lagen führen kann. Die Abstände x (Längeneinheit: km) zwischen aufeinanderfolgenden Schadstellen sind exponentialverteilt mit Dichte $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ $(x \in [0,\infty))$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Abstand benachbarter Schadstellen größer als 100 m $(= \frac{1}{10}$ km) ist?

b) Berechnen Sie die Momente M_0, M_1, M_2 und daraus die Varianz der Verteilung mit Hilfe der momentenerzeugenden Funktion $G(t) = \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{tx} f(x)\, dx$.

c) Es bezeichne x_α das α-Fraktil $(0 \le \alpha < 1)$. Begründen Sie die Formel $x_\alpha = \alpha + \dfrac{\alpha^2}{2} + \dfrac{\alpha^3}{3} + \dots$, und überprüfen Sie damit Ihr Resultat aus a).

5.) Welche Art von Flächenpunkten besitzt die Fläche $z = z(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$? (Anregung: Begründen Sie, dass die Funktion $z(x,y)$ harmonisch ist.)