Prüfung aus Mathematik 2 für BI und UI

am 10. März 2023

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Erklären Sie den Begriff der linearen Abbildung zwischen zwei Vektorräumen.

   (b) Es sei $l : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit

$$l\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad l\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad l\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die zu l gehörige Matrix A und ihre Determinante $\det A$.

2. (a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = 3xy.$$

   Bestimmen Sie das Doppelintegral

$$\iint_V f(x,y)\,dy\,dx,$$

   wobei V das Viereck mit den Eckpunkten $(0,2), (2,0), (4,2)$ und $(2,4)$ bezeichnet.

   (b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{y(x)}{4} + 1, \qquad y(0) = 0.$$

3. Bestimmen Sie die implizite Lösung des Anfangswertproblems

$$y\sin y + y^2 \sin x + (xy\cos y - y\cos x)y' = 0, \qquad y(0) = -1,$$

   indem Sie die Differentialgleichung mit einem integrierenden Faktor $m = m(y)$ exakt machen.

4. (a) Es bezeichne C die Randkurve des Kreises in der Ebene mit Radius 2 und Mittelpunkt in $(1,1)$. Bestimmen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \begin{pmatrix}(x-1)^2\\(1-x)(y-1)\end{pmatrix} d\boldsymbol{x}.$$

   (b) Es sei $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\iint_F \operatorname{grad} f \, d\boldsymbol{O},$$

   wobei F den Mantel (und nur den Mantel; ohne Deckel und Boden!) des Zylinders Z bezeichnet

$$Z = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le 4, 0 \le z \le 1\}.$$