Prüfung Mathematik 1 – 10.6.2011

Name/ Matrikelnummer:. . . . .

Lösen Sie die Beispiele der Angabe entsprechend, begründen Sie Ihre Antworten, aber fassen Sie sich kurz!

1. (a) Erklären Sie anhand einer aussagekräftigen Skizze die geometrische Bedeutung des inneren Produkts zweier Vekoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ im $\mathbb{R}^2$.

   (b) Berechnen Sie den Winkel, der von den Vektoren $\boldsymbol{u} = \binom{1}{1}$ und $\boldsymbol{v} = \binom{1}{2}$ eingeschlossen wird.
   Anmerkung: Die Funktionswerte eventuell auftretender Winkelfunktionen müssen natürlich nicht explizit ausgerechnet werden.

   2 Punkte (1+1)

2. (a) Argumentieren Sie mit dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass folgende Aussage stimmt:
   Um n, $n \geq 2$, verschiedene Punkte in der Ebene jeweils paarweise durch Geraden zu verbinden, werden $\frac{(n-1)n}{2}$ Geraden benötigt (wobei jede verbindende Gerade genau einmal gezählt wird).

   (b) Geben Sie eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x)$ (explizit) an (eine Skizze genügt nicht), welche
   - an $x = 17$ unstetig UND
   - an $x = -17$ nicht differenzierbar aber stetig UND
   - an allen anderen reellen $x \neq \pm 17$ differenzierbar ist.

   Sie müssen nicht nachrechnen, dass Ihre Funktion die geforderten Bedingungen erfüllt.

   4 Punkte (2+2)

3. Welche der folgenden Aussagen/ Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Wenn Sie eine Aussage für richtig halten, argumentieren Sie dies mit einer **kurzen und schlüssigen** Erklärung. Falsche Aussagen widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel.
   Achtung: Ohne richtige Erklärung bzw. ohne passendes Gegenbeispiel, z.B. für Raten, gibt es keine Punkte!

   (a) Wenn eine Potenzreihe Konvergenzradius 1 hat und 1 in ihrem Konvergenzbereich liegt, so liegt auch $0,9899$ in ihrem Konvergenzbereich.

   (b) Jede Potenzreihe konvergiert an ihrem Entwicklungspunkt.

   (c) Erfüllen die Koeffizienten a_n einer Potenreihe $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, so ist der Konvergenzradius 0.

   3 Punkte (jeweils 1)

4. Gegeben ist die Funktion
   $$f(x) = \frac{4x}{1 - x^2}.$$

   (a) Berechnen Sie die Stammfunktion von $f(x)$ auf die folgenden drei Arten:
   i. mittels Partialbruchzerlegung UND
   ii. mittels geeigneter anderer Integrationsmethode UND
   iii. indem Sie unter Verwendung der geometrischen Reihe $f(x)$ als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 darstellen und anschließend diese Potenzreihe integrieren.

   (b) Weisen Sie durch geeignete Umformungen (eventuell unter Verwendung bekannter Potenzreihen) nach, dass Ihre drei Ergebnisse aus (a) übereinstimmen.

   7,5 Punkte (5,5 (2+1,5+2)+2)

5. (a) Sei $g(x)$ die Umkehrfunktion zu einer Funktion $f(x)$. Geben Sie eine Funktion $h(x)$ an, welche die Gleichung
   $$g \circ f(x) = h(x) \tag{1}$$
   erfüllt.

   (b) Was muss eine Funktion $f(x)$ erfüllen, damit die Existenz einer Umkehrfunktion $g(x)$, welche die Gleichung (1) aus (a) erfüllt, garantiert wird.

   (c) Geben Sie ein konkretes Beispiel einer umkehrbaren Funktion $f(x)$ an und bestimmen Sie ihre Umkehrfunktion.

   (d) Leiten Sie beide Seiten der Gleichung (1) aus (a) ab und folgern Sie daraus eine Formel zur Berechnung für $g'(x)$.

   3,5 Punkte (0,5+1+1+1)

Viel Erfolg!