Prüfung Mathematik 1 – 28.6.2011

Name/ Matrikelnummer:...

Lösen Sie die Beispiele der Angabe entsprechend, begründen Sie Ihre Antworten, aber fassen Sie sich kurz!.

Zum Termin der mündlichen Prüfung (bitte entsprechend kreuzen:)
□ Ich möchte am 1.7. bzw. am 4.7. (wenn einer dieser beiden Termine keinesfalls geht, bitte diesen streichen) geprüft werden.

□ Ich möchte in der zweiten Ferienwoche mündlich geprüft werden, wenn möglich am ....

---

1. (a) Berechnen Sie alle (komplexen) vierten Wurzeln aus -17.
   (b) Geben Sie die Zerlegung des Polynoms $p(x) = x^4 + 17$ als Produkt von Linearfaktoren nach dem Fundamentalsatz der Algebra an.

   3 Punkte (2+1)

2. (a) Sei Q_0 ein Quadrat mit Seitenlänge $s_0 = 1$. Q_0 wird eine um 45 Grad gedrehte und entsprechend verkleinerte Kopie von Q_0 eingeschrieben – dieses eingeschriebene Quadrat, Q_1, hat Seitenlänge s_1. Dem Quadrat Q_1 wird wieder eine um 45 Grad gedrehte und entsprechend verkleinerte Kopie von Q_1 eingeschrieben – dieses eingeschriebene Quadrat sei Q_2 und s_2 seine Seitenlänge (Die Seiten von Q_2 sind also parallel zu jenen von Q_0). Q_2 wird nach selber Prozedur ein weiteres (um 45 Grad gedrehtes, verkleinertes) Quadrat Q_3 mit Seitenlänge s_3 eingeschrieben und so weiter.
   Argumentieren Sie mit dem Prinzip der vollständigen Induktion (und geometrischen Überlegungen), dass für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, \ldots$ folgende Aussage stimmt:
   Das n–te eingeschriebene Quadrat Q_n hat Seitenlänge $(1/\sqrt{2})^n$.
   Hinweis: Skizze!
   (b) Legt man die ersten N Quadrate $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{N-1}$ nebeneinander auf, wie groß ist die insgesamt überdeckte Fläche A_N? Würde man diese Prozedur unendlich fortsetzen (d.h. $\lim_{N\to\infty} A_N$), wäre der gesamte Flächeninhalt endlich? Wenn ja, wie groß wäre er?

   4 Punkte (2+2)

3. Welche der folgenden Aussagen/ Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Wenn Sie eine Aussage für richtig halten, argumentieren Sie dies mit einer **kurzen und schlüssigen** Erklärung. Falsche Aussagen widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel.
   Achtung: Ohne richtige Erklärung bzw. ohne passendes Gegenbeispiel, z.B. für Raten, gibt es keine Punkte!
   (a) Zu jeder auf $[-17, 17]$ stetigen Funktion $f(x)$ gibt es eine Konstante C, sodass $f(x) \leq C$ für alle x aus $[-17, 17]$.
   (b) Zu jeder auf $(-17, 17)$ stetigen Funktion $f(x)$ gibt es eine Konstante C, sodass $f(x) \leq C$ für alle x aus $(-17, 17)$.
   (c) Ist $f(x)$ differenzierbar und gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$, dass $f(k) \leq f(k+1)$, so ist $f(x)$ monoton steigend.
   (d) Ist $f(x)$ eine reelle Funktion, so gilt: Existiert $\lim_{x\to 17} f(x)$, so ist $f(x)$ in 17 stetig.

   4 Punkte (jeweils 1)

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = xe^x$.
   (a) Berechnen Sie die Stammfunktion von $f(x)$ auf die folgenden zwei Arten:
      i. mittels geeigneter Integrationsmethode UND
      ii. indem Sie unter Verwendung bekannter Potenzreihen $f(x)$ als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 darstellen und anschließend diese Potenzreihe integrieren.
   (b) Weisen Sie durch geeignete Umformungen (eventuell unter Verwendung bekannter Potenzreihen) nach, dass Ihre Ergebnisse aus (a) übereinstimmen.

   5 Punkte (3,5 (1,5+2)+1,5)

5. (a) Berechnen Sie die erste Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x}$ an $a = 17$ mit dem Differentialquotienten.
   (b) Berechnen Sie die Länge der Kurve $y = x^{3/2}$ über dem Intervall $[0, 5]$.

   4 Punkte (2+2)

Viel Erfolg!