Prüfung Mathematik 1 – 6.5.2011

Name/ Matrikelnummer:...

Lösen Sie die Beispiele der Angabe entsprechend und fassen Sie sich kurz!

1. (a) Skizzieren Sie in der Gauß'schen Zahlenebene
      i. die reellen Zahlen (aufgefasst als Teilmenge der komplexen Zahlen) und die rein imaginären Zahlen,
      ii. alle komplexen Zahlen z mit $Im(z) = Re(z)$,
      iii. alle komplexen Zahlen mit $Re(\frac{z}{i}) = -17$.

   (b) Geben Sie die Polardarstellungen von den reellen Zahlen -1, 2 und -2 (aufgefasst als komplexe Zahlen) an.

   (c) Rechnen Sie unter Verwendung der Divisionsregeln in Polardarstellung (und nur so!) die Brüche $\frac{-2}{2}$ und $\frac{2}{-2}$ aus und bestätigen Sie so die im reellen offensichtlich gültigen Gleichungen $-1 = \frac{-2}{2} = \frac{2}{-2}$.

   3,5 Punkte (2 (0,5+0,5+1)+0,5+1)

2. Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(x-1)^2}{4} \right)^n$.

   (a) Erklären Sie direkt anhand der Definition der Konvergenz von Reihen für welche reellen x die Reihe konvergiert, indem Sie die Formel der Partialsummen der geometrischen Reihe anwenden.
   (Achtung: Nur der angegebene Lösungsweg bringt Punkte, für Konvergenzkriterien oder andere Lösungswege gibt es keine Punkte!)

   (b) Geben Sie die Summenfunktion der Potenzreihe (vgl. abermals geometrische Reihe) an und berechnen Sie Ihren Definitionsbereich.

   (c) Warum/wie kann direkt aus (b) der Konvergenzradius der Potenzreihe gefolgert werden?

   4,5 Punkte (2+1,5+1)

3. Welche der folgenden Aussagen/ Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Wenn Sie eine Aussage für richtig halten, argumentieren Sie dies mit einer **kurzen und schlüssigen** Erklärung. Falsche Aussagen widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel. (Ohne richtige Erklärung, z.B. für Raten, gibt es keine Punkte.)

   (a) Ist $f(x)$ stetig, so ist $\int_{17}^{x} f(t)\, dt$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

   (b) Seien $a < b < c < d$ beliebige reelle Zahlen. Jede auf $[a, d]$ integrierbare Funktion $f(x)$ erfüllt $\int_a^b f(x)\, dx + \int_c^d f(x)\, dx = \int_a^d f(x)\, dx$.

   (c) Es gibt eine Funktion, sodass $\int_0^1 (f(x))^2\, dx = \left(\int_0^1 f(x)\, dx \right)^2$.

   (d) Es gibt eine Funktion, sodass $\int_0^1 (f(x))^2\, dx \neq \left(\int_0^1 f(x)\, dx \right)^2$.

   4 Punkte (jeweils 1)

4. (a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für $f(x) = 2x + 1$

   $$\underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ mal}}(x) = 2^n x + (2^n - 1).$$

   (b) Formulieren Sie die Kettenregel der Differentialrechnung und erklären Sie sie an einem konkreten aussagekräftigen Beispiel (d.h., einem Beispiel, wo die Kettenregel tatsächlich Verwendung findet) Ihrer Wahl.

   (c) Sei $g(x) = x^k \mathrm{sgn}(x)$, wobei k eine natürliche Zahl ist. Überprüfen Sie die Differenzierbarkeit von $g(x)$ an $x = 0$, indem Sie den links– und rechtsseitigen Differentialquotienten betrachten. Für welche Werte von k ist $g(x)$ differenzierbar?
   Zur Erinnerung: $\mathrm{sgn}(x) = -1$ für $x < 0$, 0 für $x = 0$, 1 für $x > 0$.

   4 Punkte (1,5+1+1,5)

5. (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2+1}$ mittels Trennung der Variablen und Variation der Konstanten.

   (b) Machen Sie die Probe für Ihr Ergebnis.

   4 Punkte (3 (1 für Trennung der Var.+ 2 für Var. der Konst.) +1)

Viel Erfolg!