Zuname:

Vorname:

KennNr:

Matr.Nr:

MATHEMATIK 1 – GRUPPE A

DRMOTA

1) Man erläutere das Prinzip der vollständigen Induktion anhand eines Beweises für folgende Behauptung:

$$\cos(x)\cos(2x)\cos(4x)\cdots\cos(2^{n-1}x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin x}$$

für alle $n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi$.
Alle Schritte des Induktionsbeweises sind genau anzugeben.
(Hinweis: Man benütze die Identität $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.)
[4 Punkte]

2) Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen zum Thema Folgen und Reihen (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein):

Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge (a_n), falls	◯ $\forall\varepsilon > 0\ \forall N(\varepsilon)\ \forall n > N(\varepsilon) : \lvert a_n - a\rvert > \varepsilon$ ◯ $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N(\varepsilon) : \lvert a_n - a\rvert < \varepsilon$ ◯ $\exists\varepsilon > 0\ \forall N(\varepsilon)\ \forall n > N(\varepsilon) : \lvert a_n - a\rvert < \varepsilon$
Die Folge $a_n = 1/(n+3)^2$ ist	◯ monoton ◯ beschränkt ◯ konvergent
Die Folge $a_n = (-1)^{n+1}$ ist	◯ monoton ◯ beschränkt ◯ konvergent
Jede konvergente Folge ist beschränkt.	◯ ja ◯ nein
Jede (nach oben und unten) beschränkte Folge ist konvergent.	◯ ja ◯ nein
Die Folge $a_n = (1+1/n)^n$ konvergiert gegen	◯ 0 ◯ 1 ◯ 2 ◯ e ◯ ∞
Ist die Folge (a_n) konvergent, dann konvergiert auch die Reihe $\sum a_n$.	◯ ja ◯ nein
Ist die Reihe $\sum a_n$ konvergent, dann konvergiert auch die Folge (a_n).	◯ ja ◯ nein

[$8 \times 1/2 = 4$ Punkte]

Bitte umblättern!!!

3) (1) Man zeige, dass die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ für $|x| < 1$ konvergiert.
(2) Wie groß ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe?
(3) Man zeige weiters, dass dies die Taylorreihe der Funktion $f(x) = -\ln(1-x)$ an der Entwicklungsstelle 0 ist (ohne Fehlergliedabschätzung).
(4) Wie ist das Konvergenzverhalten der Reihe bei $x = 1$ bzw. bei $x = -1$? Man vergleiche die Ergebnisse mit $\lim_{x\to 1-} f(x)$ bzw. $\lim_{x\to -1+} f(x)$.
[1+1+1+1 = 4 Punkte]

4) (1) Man definiere den Begriff der "Stammfunktion einer Funktion $f(x)$". Wie kann man aus einer Stammfuntion $F(x)$ von $f(x)$ alle anderen Stammfunktionen gewinnen?
(2) Welche zwei der folgenden drei Funktionen sind Stammfunktionen von $f(x)$?

$$F_1(x) = -\int_x^b f(t)\,dt, \qquad F_2(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt, \qquad F_3(x) = 2\int_a^{x/2} f(2t)\,dt$$

Begründen Sie Ihre Antwort!
(3) Man überprüfe durch Nachrechnen, dass die Funktion

$$y(x) = \exp\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)$$

Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = f(x)y(x)$ ist.
[1+2+1 = 4 Punkte]

5) (1) Wie kann man die Länge einer Kurve $t \mapsto \binom{x(t)}{y(t)}$, $a \le t \le b$, berechnen? (Die Funktionen $x(t), y(t)$ seien stetig differenzierbar.)
(2) Welche (physikalische) Interpretation hat der Vektor $\binom{x'(t)}{y'(t)}$, wenn $\binom{x(t)}{y(t)}$ als Bewegung eines Punktes in der Zeit t interpretiert wird?
(3) Man berechne die Länge der Kurve $\binom{x(t)}{y(t)}$ mit $0 \le x(t) \le 5$, wobei $x = x(t)$ und $y = y(t)$ implizit durch die Gleichung $y^2 = x^3$ gegeben sind.
(Man wähle eine geeignete Parametrisierung in t und beachte, dass die Kurve in 2 Teile zerlegt werden kann.)
[1+1+2 = 4 Punkte]

Viel Erfolg!

Wien, am 15. Jänner 2010 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)