Zuname:

Vorname:

KennNr:

Matr.Nr:

MATHEMATIK 1 – GRUPPE B

DRMOTA

1) (1) Man zeige, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \cdots$ für $|x| < 1$ konvergiert.
   (2) Wie groß ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe?
   (3) Man zeige weiters, dass dies die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ an der Entwicklungsstelle 0 ist (ohne Fehlergliedabschätzung).
   (4) Wie ist das Konvergenzverhalten der Reihe bei $x = 1$ bzw. bei $x = -1$? Man vergleiche die Ergebnisse mit $\lim_{x\to 1-} f(x)$ bzw. $\lim_{x\to -1+} f(x)$.

   [1+1+1+1 = 4 Punkte]

2) Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen zum Thema Folgen und Reihen (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein):

Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge (a_n), falls	◯ $\exists\varepsilon > 0\, \forall N(\varepsilon)\, \forall n > N(\varepsilon) : \lvert a_n - a\rvert < \varepsilon$ ◯ $\forall\varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon)\, \forall n > N(\varepsilon) : \lvert a_n - a\rvert < \varepsilon$ ◯ $\forall\varepsilon > 0\, \forall N(\varepsilon)\, \forall n > N(\varepsilon) : \lvert a_n - a\rvert > \varepsilon$
Die Folge $a_n = \cos(n\pi)$ ist	◯ monoton ◯ beschränkt ◯ konvergent
Die Folge $a_n = 1/(n+2)^3$ ist	◯ monoton ◯ beschränkt ◯ konvergent
Jede (nach oben und unten) beschränkte Folge ist konvergent.	◯ ja ◯ nein
Jede konvergente Folge ist beschränkt.	◯ ja ◯ nein
Die Folge $a_n = (1 - 1/n)^n$ konvergiert gegen	◯ 0 ◯ 1 ◯ 1/2 ◯ $1/e$ ◯ ∞
Ist die Reihe $\sum a_n$ konvergent, dann konvergiert auch die Folge (a_n).	◯ ja ◯ nein
Ist die Folge (a_n) konvergent, dann konvergiert auch die Reihe $\sum a_n$.	◯ ja ◯ nein

[$8 \times 1/2 = 4$ Punkte]

Bitte umblättern!!!

3) (1) Wie kann man die Länge einer Kurve $t \mapsto \binom{t}{y(t)}$, $a \le t \le b$, berechnen? (Die Funktion $y(t)$ sei stetig differenzierbar.)
(2) Welche (physikalische) Interpretation hat der Vektor $\binom{1}{y'(t)}$, wenn $\binom{t}{y(t)}$ als Bewegung eines Punktes in der Zeit t interpretiert wird?
(3) Man berechne die Länge der Kurve $\binom{t}{y(t)}$ mit $0 \le t \le 3$ und der Funktion $y(t) = 2t^{3/2}$.

[1+1+2 = 4 Punkte]

4) (1) Man definiere den Begriff der "Stammfunktion einer Funktion $f(x)$". Wie kann man aus einer Stammfuntion $F(x)$ von $f(x)$ alle anderen Stammfunktionen gewinnen?
(2) Welche zwei der folgenden drei Funktionen sind Stammfunktionen von $f(x)$?

$$F_1(x) = 3\int_c^{x/3} f(3t)\,dt, \qquad F_2(x) = -\int_{2x}^{x} f(t)\,dt, \qquad F_3(x) = -\int_x^a f(t)\,dt.$$

Begründen Sie Ihre Antwort!
(3) Man überprüfe durch Nachrechnen, dass die Funktion

$$y(x) = \exp\left(-\int_a^x f(t)\,dt\right)$$

Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = -f(x)y(x)$ ist.
[1+2+1 = 4 Punkte]

5) Man erläutere das Prinzip der vollständigen Induktion anhand eines Beweises für folgende Behauptung:

$$\cos(x)\cos(2x)\cos(4x)\cdots\cos(2^n x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin x}$$

für alle $n \in \mathbb{Z},\ n \ge 0,\ x \in \mathbb{R}, x \ne k\pi$.
Alle Schritte des Induktionsbeweises sind genau anzugeben.
(Hinweis: Man benütze die Identität $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.)
[4 Punkte]

Viel Erfolg!

Wien, am 15. Jänner 2010 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)