Zuname:

Vorname:

KennNr:

Matr.Nr:

MATHEMATIK 1 - GRUPPE A

14. Jänner 2011

1) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$3^n \geq 5n \text{ für } n \geq 3$$

Alle Schritte des Induktionsbeweises sind genau anzugeben.
[4 Punkte]

2) Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein):

Die Folge $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ist	◯ monoton ◯ beschränkt ◯ bestimmt divergent ◯ konvergent
Die Folge $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ ist	◯ beschränkt ◯ bestimmt divergent ◯ konvergent
Jede beschränkte und monotone Folge ist konvergent.	◯ richtig ◯ falsch
Ist die Reihe $\sum a_n$ konvergent, dann ist die Folge (a_n) eine Nullfolge.	◯ richtig ◯ falsch
Ist (a_n) eine Nullfolge, dann ist $\sum a_n$ konvergent.	◯ richtig ◯ falsch
Ist $a_n \leq b_n$ für $n = 1, \ldots$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.	◯ richtig ◯ falsch
Die Funktion $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$ ist	◯ stetig ◯ differenzierbar ◯ beschränkt ◯ monoton
Die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ ist	◯ stetig ◯ differenzierbar ◯ beschränkt ◯ monoton

[8×1/2=4 Punkte]

3) Sei $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
(i) Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius dieser Potenzreihe 1 ist.
(ii) Bestimmen Sie die Potenzreihe von $f'(x)$ für $|x| < 1$.
(iii) Zeigen Sie, dass $-\ln(1-x) = x\, f'(x)$ für $|x| < 1$ gilt.
[1+1,5+1,5=4 Punkte]

Bitte umblättern!!!

4) Sei $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ für $x > 0$.
(i) Zeigen Sie, dass $\int_2^\infty f(x)\,dx$ divergiert.
(ii) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=2}^\infty f(n)$ divergent ist mit dem Cauchyschen Integralkriterium für unendliche Reihen.
(iii) Erklären Sie den Fall des Cauchyschen Integralkriteriums, den Sie angewendet haben, anhand einer Skizze.
[1,5+1+1,5=4 Punkte]

5) (i) Geben Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an.
(ii) Zeigen Sie, dass
$$x(t) = \int_0^t \sin(t-s)\, f(s)\, ds$$
eine Lösung der Differentialgleichung
$$\ddot{x} + x = f$$
ist, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.
[2+2=4 Punkte]

Viel Erfolg!

(Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)