

Zuname:

Vorname:

KennNr:

Matr.Nr:

MATHEMATIK 1

DRMOTA

- 1) Man erläutere das Prinzip der vollständigen Induktion anhand eines Beweises für folgende Behauptung:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$.

[4 Punkte]

- 2) Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen zum Thema Differential- und Integralrechnung (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein):

Welche Funktion ist Stammfunktion der Funktion $f(x) = 1/\sqrt{2+2x+x^2}$?	<input type="radio"/> $\operatorname{arsinh}(x+1)$ <input type="radio"/> $\operatorname{arcosh}(x+1)$ <input type="radio"/> $\operatorname{artanh}(x+1)$
Die Funktion $f(x) = x^3$ ($x \in \mathbb{R}$) ist	<input type="radio"/> monoton <input type="radio"/> beschränkt <input type="radio"/> differenzierbar
Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) ist	<input type="radio"/> monoton <input type="radio"/> beschränkt <input type="radio"/> differenzierbar
Die Funktion $f(x) = x/\sqrt{1+x}$ hat eine konvergente Taylorreihenentwicklung um $a = 0$.	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein
Die Funktion $f(x) = \ln x$ hat eine konvergente Taylorreihenentwicklung um $a = 0$.	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein
Die Funktion $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$ hat den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$	<input type="radio"/> 0 <input type="radio"/> 1 <input type="radio"/> 2 <input type="radio"/> e <input type="radio"/> ∞
Jede stetige Funktion ist integrierbar	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein
Jede stetige Funktion ist differenzierbar	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein

[8 \times 1/2 = 4 Punkte]

Bitte umblättern!!!

- 3) (1) Untersuchen Sie, für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n(n-1)} x^n$$

konvergiert.

Bemerkung: Beachten Sie auch die Fälle $x = 1$ und $x = -1$!

- (2) Wie groß ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe?
 (3) Man gebe eine Formel für den Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ an.
 [2+1+1 = 4 Punkte]
- 4) (1) Was ist eine rationale Funktion?
 (2) Stellen Sie den Ansatz für die Partialbruchzerlegung der Funktion
- $$f(x) = \frac{x^4 + x^3 - 7x^2 - 6x - 7}{(x+2)^2(x-1)(x^2+1)}$$
- auf.
 (3) Bestimmen Sie für 2 dieser Partialbrüche die dazugehörigen Konstanten
 (z.B. für $1/(x+2)$ und $1/(x-1)$).
 (4) Bestimmen Sie für zwei der Partialbrüche von $f(x)$ eine Stammfunktion.
 [1+1+1+1 = 4 Punkte]
- 5) (1) Welche Verfahren zum näherungsweise Bestimmen von Nullstellen von Funktionen kennen Sie?
 (2) Erläutern Sie das Newtonsche Näherungsverfahren anhand einer Skizze und geben Sie auch die Rekursionsformel an.
 (3) Führen Sie drei Schritte des Newtonverfahrens für die Funktion $f(x) = x^2 - 2$ und dem Anfangswert $x_0 = 1$ durch.
 [1+2+1 = 4 Punkte]

Viel Erfolg!

Wien, am 5. Februar 2010 (Ab hier freilassen!)

- 1)
 2)
 3)
 4)
 5)