Zuname:

Vorname:

KennNr:

Matr.Nr:

MATHEMATIK 2 MB, WI, VT

19. Jänner 2018

(Diese Seite ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Viel Erfolg!

1) (i) Sei $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ein allgemeines Gleichungssystem mit einer (m, n) Matrix A und nehmen Sie an, dass die Lösungen des homogenen Systems $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ einen k-dimensionalen Vektorraum bilden. Beschreiben Sie die Lösungsmenge des inhomogenen Systems!

(ii)

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & & = 5 \\ -2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & & & = -13 \\ 3x_1 & -6x_2 & +2x_3 & +13x_4 & +x_5 & = 2 \\ 2x_1 & -4x_2 & +x_3 & +8x_4 & +x_5 & = 3 \end{array}$$

Geben Sie die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems an.

[10+10= 20 Punkte]

2) Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein):

Sei A eine $(3,3)$ Matrix und λ ein einfacher Eigenwert von A. Die Dimension des Lösungsraums von $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ ist	◯ 0 ◯ 1 ◯ 2 ◯ 3
Sei A eine $(3,3)$ Matrix, die eine Spiegelung an einer Ebene beschreibt. Dann sind die Eigenwerte (mit Vielfachheit) von A	◯ $1,-1,-1$ ◯ $1,1,-1$ ◯ $0,0,-1$ ◯ $0,1,1$
Sei A eine $(2,2)$ Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Dann gilt	◯ $\det A = -1$ ◯ Rang von $A = 2$ ◯ Rang von $A = 1$ ◯ A ist singulär
Sei A eine $(2,2)$ Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$. Dann gilt	◯ $\det A = 1$ ◯ Rang von $A = 0$ ◯ Rang von $A = 1$ ◯ A ist singulär
Sei A eine $(2,2)$ Matrix, die eine Projektion auf eine Gerade beschreibt. Dann sind die Eigenwerte (mit Vielfachheit) von A	◯ $1,-1$ ◯ $1,0$ ◯ $0,-1$ ◯ $1,1$

[5×4=20 Punkte]
Für jede Teilaufgabe gibt es entweder die volle Punktezahl oder keine Punkte.

3) (i) Sei F eine Fläche mit Parametrisierung $\boldsymbol{x} : G \to \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Dabei ist $G \subset \mathbb{R}^2$ und $\boldsymbol{x}$ stetig differenzierbar. Wie berechnet man den Normalenvektor von F? Wie ist $\int_F \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{O}$ definiert?

(ii) Sei $B = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\right\}$ und $\boldsymbol{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_B \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{O}$ direkt <u>und</u> mit dem Satz von Stokes.

[5+15= 20 Punkte]

4)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \; A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

(i) Man gebe die Eigenwerte von A an.

(ii) Man gebe die Eigenvektoren von A an.

(iii) Man gebe die allgemeine Lösung dieses Differentialgleichungssystems an.

[5+10+5=20 Punkte]

5)

$$(1 + 2x^2) + 2\,x\,y\,y' = 0$$

(i) Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung nicht exakt ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $e^{x^2+y^2}$ ein integrierender Faktor ist.

(iii) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung explizit an.

[4+4+12 = 20 Punkte]