Zuname:

Vorname:

KennNr:

Matr.Nr:

MATHEMATIK 2, GRUPPE A

DRMOTA

1) (1) Man bestimme alle Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} x + y + 2z - 2u &= 2 \\ 2x + z - 3u &= 0 \\ 3x + y + 3z - 5u &= 2 \\ -x + 3y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

(2) Man bestimme die Determinante $\det(A)$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

und entscheide damit, ob es die inverse Matrix A^{-1} gibt.

(3) Weiters bestimme man (direkt !!) $\det((A^{-1})^3)$ und $\det((A^T)^{-1})$.
(A^T bezeichnet die transponierte Matrix von A.)

[2+1+1 = 4 Punkte]

2) (1) Wie ist ein Gradientenfeld $\mathbf{u}(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y)$ definiert?

(2) Wie kann man überprüfen, ob ein Gradientenfeld vorliegt? (Integrabilitätsbedingungen)

(3) Man zeige mit Hilfe der Integrabilitätsbedingungen, dass das folgende Vektorfeld $\mathbf{u}(x, y)$ ein Gradientenfeld darstellt und bestimme eine Stammfunktion $F(x, y)$ von $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy - \sin y + 5 \\ x^2 - x\cos y - 3y^2 \end{pmatrix}.$$

(4) Man bestimme das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ entlang einer beliebigen Kurve, die die Punkte $(0, 0)$ und $(1, \pi)$ verbindet.

[1+1+1+1 = 4 Punkte]

3) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + y' - 2y = 2x - 3.$$

Beantworten Sie dazu die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein):

Diese Gleichung ist eine	◯ gewöhnliche Differentialgleichung ◯ partielle Differentialgleichung, ◯ lineare Differentialgleichung.
Die allgemeine Lösung der Gleichung kann als zwei-parametrige Kurvenschar interpretiert werden.	◯ ja ◯ nein
Wie viele verschiedene partikuläre Lösungen besitzt diese Gleichung?	◯ keine ◯ 1 ◯ 2 ◯ mehr als 2
Diese Gleichung ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.	◯ ja ◯ nein
Die allgemeine Lösung obiger Differentialgleichung ist gegeben durch die Summe	◯ der allgemeinen Lösung der homogenen und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung, ◯ einer partikulären Lösung der homogenen und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung.
Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung besitzt die beiden Lösungen:	◯ $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ ◯ $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ ◯ $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ ◯ $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$
Eine partikuläre Lösung findet man mit Hilfe des unbestimmten Ansatzes:	◯ $y_p(x) = A + Bx$ ◯ $y_p(x) = Ax + Bx^2$ ◯ $y_p(x) = Ax^2 + Bx^3$
Kann in diesem Beispiel eine partikuläre Lösung mit Hilfe des Prinzips der Variation der Konstanten bestimmt werden?	◯ ja ◯ nein

[$8 \times 1/2 = 4$ Punkte]

4) (1) Man gebe das Taylorsche Näherungspolynom 2. Ordnung einer Funktion $f(x,y)$ an der Anschlussstelle (a,b) an.
(2) Wie kann man aus dem Taylorsche Näherungspolynom 2. Ordnung ablesen, ob der Punkt (a,b) ein relatives Extremum ist und ob ein relatives Minimum bzw. relatives Maximum vorliegt?
(3) Bestimmen Sie das Taylorsche Näherungspolynom 2. Ordnung an der Stelle $(a,b) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ der Funktion

$$f(x,y) = xy^2 + (y-1)e^{3x} + \cos(2\pi x + y).$$

[2+1+1 = 4 Punkte]

5) (1) Wie lautet die Fourierreihe einer 2π-periodischen Funktion $f(x)$ und wie kann man die dabei auftretenden Koeffizienten berechnen?
(2) Konvergiert die Fourierreihe immer gegen den Funktionswert $f(x)$? Wenn nein, dann gebe man ein Beispiel dafür an.
(3) Man bestimme die Fourierreihe der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x < \pi/2, \\ 0 & \text{für } \pi/2 \le x < 3\pi/2, \\ 1 & \text{für } 3\pi/2 \le x < 2\pi, \end{cases}$$

[1+1+2 = 4 Punkte]

Viel Erfolg!

Wien, am 4. Juni 2010 (Ab hier freilassen!)