Vorlesungsprüfung Mathematik 3 9.3.2012

Name: ....

Matr.Nr.: ....

Deckblatt nicht herunterreissen! - Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben!

1. Gegeben sind die Funktionen $f_n(x) = \sqrt{2n+1}\,x^n$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ und $x \in [0, 1]$.

   (a) Geben Sie alle f_n an, welche normiert sind, d.h. welche $\|f_n\| = 1$ erfüllen!

   (b) Bilden die Funktionen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ ein *Orthonormal*system auf $[0, 1]$? Begründen Sie Ihre Antwort!

   (c) Geben Sie zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R^2}$ an, sodass

   $$\langle f_0, f_0\rangle = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}, \quad \langle f_0, f_1\rangle = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, \quad \langle f_1, f_1\rangle = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}.$$

   Hinweis: $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$, $\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   (d) Geben Sie die orthogonale Projektion von $g(x) = e^x$ auf den von f_1 aufgespannten eindimensionalen Vektorraum an!

   Der Vektorraum $C[0, 1]$ ist wie gewohnt mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ versehen; der Vektorraum $\mathbf{R^2}$ mit dem Euklidischen Skalarprodukt.

   4 Punkte (1+1+1+1)

2. Gegeben ist die PDE

   $$(1+t)u_t - (1+t)u_x = u. \tag{1}$$

   (a) Klassifizieren Sie die PDE, d.h. bestimmen Sie Ordnung und entscheiden Sie ob die PDE homogen, inhomogen, linear, quasilinear, und/oder nichtlinear ist.

   (b) Finden Sie jene Lösung von (1) welche zusätzlich die Anfangsbedingung $u(x, 0) = e^x$ erfüllt.

   5 Punkte (1+4)

3. Gegeben Sei ein drehkegelförmiges Martini-Glas:

   $$G = \{(x, y, z) : 4z^2 \geq x^2 + y^2 \text{ mit } 0 \leq z \leq 1\}.$$

   Durch apruptes Schütteln (nicht Rühren) wird darin ein Geschwindigkeitsfeld der Form $\mathbf{V}(x, y, z) = \phi(x, y, z)\mathbf{w}$ ausgelöst. Dabei ist $\phi(x, y, z) = 4z^2 - x^2 - y^2$ und $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Wieviel Martini wird dabei verschüttet, d.h. wie groß ist der Fluss von $\mathbf{V}$ durch die *Deckfläche* von G? Fertigen Sie eine Skizze an!

   Zur Lösung können Sie einen Integralsatz verwenden, müssen aber nicht! **3 Punkte**

BITTE WENDEN!

4. (a) Unterwerfen Sie die PDE der angegebenen Transformation:

$$u_{xx} + 2u_x = u_{tt} + 2u_t, \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

$$X = x + t, \qquad T = x - t.$$

(b) Geben Sie die *allgemeine* Lösung der transformierten PDE

$$u_{XT} = -u_T$$

an und substituieren Sie auf (x, t)-Koordinaten zurück. Gehen Sie dazu analog zur D'Alembert'schen Lösung der Schwingungsgleichung vor!

(c) Erklären Sie, welche zusätzlichen Anfangs- bzw. Rand-Bedingungen bei der PDE aus (a) allgemein nötig sind um die Lösung eindeutig zu machen!

Geben Sie sich selbst konkret solche Bedingungen vor und geben Sie jene nichttriviale Lösung an, welche zusätzlich Ihren Bedingungen genügt!

8 Punkte (2+4+2)

____ / **20**

Gutes Gelingen