Vorlesungsprüfung Mathematik 3 - 20.1.2012

Name: ....

Matr.Nr.: ....

Deckblatt nicht herunterreissen! - Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben!

1. Gegeben sind die Funktionen $f_n(x) = 3x^n$ für $x \in [0, 1]$ und $n = 0, 1, 2, \ldots$

   (a) Geben Sie alle f_n an, welche normiert sind, d.h. welche $\|f_n\| = 1$ erfüllen!

   (b) Bilden die Funktionen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ ein vollständiges *Orthogonal*system auf $[0, 1]$? Begründen Sie Ihre Antwort!

   (c) Berechnen Sie die Orthogonal-Projektion von $g(x) = e^x$ auf den von $f_0(x)$ und $f_1(x)$ aufgespannten (zweidimensionalen) Vektorraum!

   Der Vektorraum $C[0, 1]$ ist wie gewohnt mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ versehen.

   1+2+2 Punkte

2. Gegeben sei die Gleichung 1. Ordnung
$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0 \tag{1}$$
   mit stetig differenzierbaren Funktionen $a(x, y)$ und $b(x, y)$.

   (a) Erklären Sie den Begriff der Charakteristik und führen Sie aus, weshalb jede Lösung u von (1) notwendigerweise konstant entlang Charakteristiken sein muss.

   (b) Berechnen Sie konkret alle Lösungen von (1) für $a(x, y) = x$ und $b(x, y) = 2y$ und skizzieren Sie die Charakteristiken

   3+2 Punkte

3. Gegeben Sei das Vektorfeld $V(x, y, z) = (-yz, xz^2, xy)$, der Drehkegelmantel
$$M = \{(x, y, z) : z^2 = x^2 + y^2 \text{ mit } 0 \le z \le 1\}$$
   sowie die Halbkugel
$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1 \text{ mit } 1 \le z \le 2\}.$$

   (a) Skizzieren Sie M und K und berechnen Sie *unter Verwendung eines geeigneten Integralsatzes* die Oberflächenintegrale
$$\iint_M \mathrm{rot}V \, d\mathbf{O} \quad \text{und} \iint_K \mathrm{rot}V \, d\mathbf{O}.$$

   (b) Geben Sie den von Ihnen verwendeten Integralsatz mit all seinen Voraussetzungen an!

   4+1 Punkte

4. Lösen Sie für $x \in \mathbf{R}$ und $t \ge 0$ die PDE
$$u_{xx} - u_{tt} = 4(x + t), \quad \text{mit } u(x, 0) = 0 \quad \text{und } u_t(x, 0) = 0 \tag{2}$$
   indem Sie die Koordinaten-Transformation $X := x + t$ und $T := x - t$ verwenden! 5 Punkte

   Hinweis: Rücktransformation nicht vergessen!

Gutes Gelingen

Vorlesungsprüfung Mathematik 3 - 20.1.2012

Name: ....

Matr.Nr.: ....

Deckblatt nicht herunterreissen! - Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben!

1. Gegeben sind die Funktionen $f_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{x^n}$ für $x \in [1,2]$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$

   (a) Geben Sie alle f_n an, welche normiert sind, d.h. welche $\|f_n\| = 1$ erfüllen!

   (b) Bilden die Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ ein vollständiges *Orthogonal*system auf $[1,2]$? Begründen Sie Ihre Antwort!

   (c) Berechnen Sie die Orthogonal-Projektion von $g(x) = 1$ auf den von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ aufgespannten (zweidimensionalen) Vektorraum!

   Der Vektorraum $C[1,2]$ ist wie gewohnt mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_1^2 f(x)g(x)dx$ versehen.

   1+2+2 Punkte

2. Gegeben sei die Gleichung 1. Ordnung

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0 \tag{1}$$

   mit stetig differenzierbaren Funktionen $a(x,y)$ und $b(x,y)$.

   (a) Erklären Sie den Begriff der Charakteristik und führen Sie aus, weshalb jede Lösung u von (1) notwendigerweise konstant entlang Charakteristiken sein muss.

   (b) Berechnen Sie jene Lösung von (1) für $a(x,y) = 1$ und $b(x,y) = y$, welche zusätzlich $u(0,y) = \ln y$ erfüllt.

   3+2 Punkte

3. Gegeben sei das Skalarfeld $\varphi(x,y,z) = 2e^x \cos y + \frac{z^2}{2}$ und der Drehkegel

$$K = \{(x,y,z) : z^2 \geq x^2 + y^2 \text{ mit } 0 \leq z \leq 2\}.$$

   Es bezeichne M den Mantel des Drehkegels und D die Deckfläche des Drehkegels, welche als Schnitt von K mit der Ebene $z = 2$ ensteht.

   (a) Skizzieren Sie ∂K (d.h. die Oberfläche des Drehkegels) und berechnen Sie folgende Oberflächenintegrale

$$\iint_{\partial K} \nabla\varphi\, d\mathbf{O}, \quad \iint_M \nabla\varphi\, d\mathbf{O} \quad \text{und} \iint_D \nabla\varphi\, d\mathbf{O}.$$

   (b) Zumindest eines der in (a) gesuchten Oberflächenintegrale kann mithilfe eines Integralsatzes berechnet werden. Geben Sie den verwendeten Integralsatz mit all seinen Voraussetzungen an!

   Hinweis: Die Spitze des Drehkegels liegt im Punkt (0/0/0)

   4+1 Punkte

4. Lösen Sie für $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ die PDE

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad \text{für } 0 \leq r \leq 1 \text{ und } 0 \leq \varphi < 2\pi \tag{2}$$

   Berechnen Sie mittels Separationsansatz die allgemeine Lösung $u(r,\varphi)$ und passen Sie dann speziell an die Randbedingung $u(1,\varphi) = \sin\varphi + \cos\varphi$ an!

   5 Punkte

Gutes Gelingen