Prüfung aus Mathematik 3 für MB, VT, WI

am 1. März 2019

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Bestimmen Sie die Residuen von

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

an ihren Polstellen in der *oberen* Halbebene.

(b) Es bezeichne S_R den mathematisch positiv durchlaufenen Halbkreisbogen in der oberen Halbebene mit Radius R und Mittelpunkt 0. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{1}{1+z^4}\, dz = 0.$$

(c) Formulieren Sie den Residuensatz und verwenden Sie ihn, sowie die Ergebnisse aus (a) und (b) zur Bestimmung von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx.$$

2. (a) Geben Sie die allgemeine Gestalt eines Sturm–Liouvilleschen Eigenwertproblems an. Welche Form hat das zugehörige innere Produkt auf dem Raum $C[a,b]$?

(b) Beweisen Sie, dass die Eigenfunktionen verschiedener Eigenwerte eines Sturm–Liouvilleschen Eigenwertproblems orthogonal sind.

3. Gegeben sei eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deren Laplace- und Fouriertransformierte existieren.

(a) Geben Sie die Definition der Laplacetransformierten $\mathcal{L}\{f\}$ und der Fouriertransformierten $\mathcal{F}\{f\}$ von f an.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{F}\{f'\}(s) = is\mathcal{F}\{f\}(s).$$

(c) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 3 & \text{für } -7 \le x \le 7, \\ 0 & \text{für } |x| > 7 \end{cases}$$

4. Bestimmen Sie für $0 \le r \le 3$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ eine Lösung des Dirichletschen Randwertproblems

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \qquad u(3,\varphi) = \frac{15}{2} + \sin^2\varphi.$$

Hinweis: $\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\varphi)$