Prüfung aus Mathematik 3 für MB, VT, WI

am 10. Oktober 2014

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Gegeben sei der Kegel $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$ sowie das Vektorfeld
$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ z^2 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie das Oberflächenintegral
$$\iint\limits_{\partial K} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{O}$$
unter Verwendung eines geeigneten Integralsatzes.
Formulieren Sie den von Ihnen verwendeten Integralsatz auch allgemein und ausführlich!

2. Auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ sei die folgende Funktion gegeben
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < \pi, \\ -1 & \text{für } \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$
   (a) Entwickeln Sie f in eine gewöhnliche Fourierreihe.
   (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung den Wert der Reihe
   $$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$
   wobei a_k und b_k die Fourierkoeffizienten aus (a) bezeichnen.
   (c) Formulieren Sie den Satz von Dirichlet.
   Gegen welchen Wert konvergiert die Fouriereihe aus (a) an $x = \pi$?

3. Gegeben sei die eindimensionale, beidseitig unbeschränkte Schwingungsgleichung
$$u_{tt} = 9u_{xx}, \qquad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x). \tag{1}$$
Verwenden Sie die Koordinatentransformation
$$X = x + 3t \qquad \text{und} \qquad T = x - 3t$$
zur **Herleitung** der D'Alembertschen Lösungsformel für (1):
$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-3t) + f(x+3t)) + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} g(s)\, ds.$$

4. Bestimmen Sie für $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq \varphi \leq \pi$ eine Lösung des Randwertproblems
$$r^2\, u_{rr} + r\, u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \qquad u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,\pi) = 0, \qquad u(1,\varphi) = 17 + \cos(42\varphi).$$