Prüfung aus Mathematik 3 für MB und VT

am 10. Juni 2011

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Gegeben sei ein Vektorraum $\mathcal{V}$ mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und dadurch induzierter Norm $\|\cdot\|$, sowie ein System von paarweise orthonormalen Elementen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \ldots$
   Zeigen Sie, dass für $m \in \mathbb{N}$, $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{V}$ stets
   $$\|f - (c_1\varphi_1 + \ldots + c_m\varphi_m)\| \leq \|f - (d_1\varphi_1 + \ldots + d_m\varphi_m)\|,$$
   wenn
   $$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

2. Bestimmen Sie die *allgemeine* Lösung von
   $$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

3. (a) Formulieren Sie den Integralsatz von Gauß (ausführlich).
   (b) Berechnen Sie unter Verwendung eines geeigneten Integralsatzes
   $$\int_C (3x^2 + y)\,dx + 5x\,dy \qquad \text{und} \qquad \int_C -5x\,dx + (3x^2 + y)\,dy,$$
   wobei C die (gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene) Randkurve des Dreiecks mit den Ecken (0,0), (1,1) und (0,1) bezeichnet.

4. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems
   $$u_{tt} = 4u_{xx} + t, \qquad u(x,0) = u_t(x,0) = 0,$$
   mit Hilfe der Koordinatentransformation $X = x + 2t$, $T = x - 2t$.