Prüfung aus Mathematik 3 für MB und VT

am 11. März 2011

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Setzen Sie die auf $(-\pi, \pi]$ definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Skizzieren Sie die so erhaltene Funktion und entwickeln Sie diese in eine (gewöhnliche) Fourierreihe.

   (b) Formulieren Sie den Satz von Dirichlet über Fourierreihen!

   Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe aus (a) an $x = -1$ bzw. $x = \pi$.

2. Die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sind gegeben durch (nicht nachrechnen)

$$\lambda_{1,2} = 0, \qquad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{2}.$$

Bestimmen Sie zwei zum Doppeleigenwert 0 gehörige Fundamentallösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}.$$

3. Formulieren Sie den Integralsatz von Gauß und verwenden Sie diesen zur Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c\,\Delta T \qquad (c > 0,\ \text{fest})$$

für die Temperatur T in einem Körper K.

4. Gegeben sei für $0 \leq x \leq 1$ und $t \geq 0$ das Rand-Anfangswertproblem

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = \sin(\pi x),\ u_t(x,0) = 0.$$

Zeigen Sie, dass

$$u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(\pi t)$$

die *eindeutig* bestimmte Lösung dieses Problems ist.