Prüfung aus Mathematik 3 für MB und VT

am 12. März 2010

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Erklären Sie ausführlich den Begriff des *vollständigen Orthogonalsystems* in einem Vektorraum $\mathcal{V}$ mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$.

   (b) Das Funktionensystem
   $$y_n(x) = \sin(n\pi x), \qquad n \in \mathbb{N},$$
   bildet ein Orthogonalsystem im Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ bezüglich dem inneren Produkt
   $$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$
   Bestimmen Sie die Fourierreihe von $f(x) = x$ bezüglich diesem Orthogonalsystem.

2. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem
   $$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Formulieren *und* beweisen Sie den Integralsatz von Green.

   (b) Verwenden Sie einen geeigneten Integralsatz zur Berechnung von
   $$\int_C \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} d\boldsymbol{x},$$
   wobei C die Randkurve des Kreises mit Radius 3 und Mittelpunkt in $(1,4)$ bezeichnet.

4. (a) Beschreiben Sie allgemein die Vorgangsweise bei der Lösung einer linearen partiellen Differentialgleichung der Form
   $$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0,$$
   wobei $a, b, c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar sind.

   (b) Bestimmen Sie eine möglichst allgemeine Lösung der Differentialgleichung
   $$u_x + xu_y + u = 0.$$