Prüfung aus Mathematik 3 für MB, VT, WI

am 12. Juni 2015

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen:

   (a) Ist C eine positiv orientierte, einfach geschlossene Kurve, die samt ihrem Inneren D in G liegt, dann gilt für $z \in D$ die Formel
   $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

   (b) Sind $p \in G$ und $r > 0$ so, dass $\{z : |z - p| \leq r\} \subseteq G$, dann gibt es Zahlen $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C}$, sodass für alle z mit $|z - p| \leq r$ gilt
   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - p)^n.$$

2. Auf $C[-1, 1]$ sei das folgende innere Produkt gegeben
   $$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx.$$

   (a) Entscheiden Sie ob die Funktionen $\varphi_1(x) = x$ und $\varphi_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ orthogonal sind.

   (b) Finden Sie Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, die nicht alle Null sind, sodass die Funktion
   $$h(x) = ax^3 + bx$$
   orthogonal auf den von $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ aufgespannten Unterraum steht.

   (c) Finden Sie Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, sodass folgender Ausdruck minimal wird
   $$\int_{-1}^{1} (c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) - x^2)^2\, dx.$$

3. (a) Es sei $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ integrierbar und $|y(t)| \leq ke^{ct}$ für $t \geq 0$ mit $k, c \in \mathbb{R}$ fest.
   Geben Sie die Definition der Laplacetransformierten $\mathcal{L}\{y\}$ von y an und verwenden Sie diese um zu zeigen, dass
   $$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = -\mathcal{L}\{ty(t)\}(s). \tag{1}$$
   Welche Formel ergibt sich durch Iteration von (1) für $\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$?

   (b) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt$ konvergent.
   Geben Sie die Definition der Fouriertransformierten $\mathcal{F}\{g\}$ von g an und verwenden Sie diese um zu zeigen, dass
   $$\frac{d}{ds}\mathcal{F}\{g(t)\}(s) = -i\mathcal{F}\{tg(t)\}(s). \tag{2}$$
   Welche Formel ergibt sich durch Iteration von (2) für $\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{F}\{g(t)\}(s)$?

4. Bestimmen Sie für $0 \leq x \leq \pi$ und $t \geq 0$ eine Lösung des Randanfangswertproblems
   $$u_t = u_{xx}, \qquad u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \qquad u(x, 0) = 1 + \cos(17x).$$