

Deckblatt nicht herunterreißen! - Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben!  
 Bei den Aufgaben 1 und 2 zählen nur die Antworten auf dem Deckblatt. Es sind stets konkrete Zahlen einzutragen! Etwaige Nebenrechnungen bitte auf Schmierpapier durchführen und nicht abgeben!

Name: .....

Matr.Nr.: .....

1. Setzen Sie die Funktion  $g(x) = \sin x$  vom Intervall  $[0, \pi)$  periodisch auf ganz  $\mathbb{R}$  fort. Sei  $G(x)$  diese Fortsetzung. Entwickeln Sie  $G(x)$  in eine trigonometrische Fourier-Reihe auf  $[0, 2\pi]$  und beantworten Sie folgende Fragen!

- (a) Der Fourier-Koeffizient  $\frac{a_0}{2}$  lautet .....
- (b) Der Fourier-Koeffizient  $a_3$  lautet .....
- (c) Der Fourier-Koeffizient  $a_4$  lautet .....
- (d) Der Wert der Summe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$  lautet .....

Betrachten Sie nun die Fourier-Approximationen  $s_n(x)$  von  $G$  für  $n \rightarrow \infty$

- (e) Der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(-\pi/2)$  lautet .....

**10 Punkte (2+2+2+2+2)**

2. Betrachten Sie das auf  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  definierte Vektorfeld

$$\mathbf{V}_\alpha(x, y, z) = \frac{\alpha}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} y - z \\ z - x \\ x - y \end{pmatrix},$$

wobei  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Parameter ist. Beantworten Sie folgende Fragen:

- (a) Für welche Werte von  $\alpha$  ist  $\nabla \cdot \mathbf{V}_\alpha = 0$ ?  
 für kein  $\alpha$       $\alpha = -1$       $\alpha = 0$       $\alpha = 1$      für alle  $\alpha$
- (b) Sei  $\alpha = 1$  und  $B$  die Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt  $(0, 0, 0)$ . Der Wert des Oberflächenintegrals  $\iint_{\partial B} \mathbf{V}_1 d\mathbf{O}$  beträgt: .....
- (c) Sei  $\alpha = 1$  und  $B$  die Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt  $(1, 1, 1)$ . Der Wert des Oberflächenintegrals  $\iint_{\partial B} \mathbf{V}_1 d\mathbf{O}$  beträgt: .....
- (d) Für welche Werte von  $\alpha$  ist  $\nabla \times \mathbf{V}_\alpha = 0$ ?  
 für kein  $\alpha$       $\alpha = -1$       $\alpha = 0$       $\alpha = 1$      für alle  $\alpha$
- (e) Sei  $\alpha = 0$  und  $C$  die Kreislinie mit Radius 1 und Mittelpunkt  $(0, 0, 0)$ , welche sich in der Ebene  $x + y + z = 0$  befindet.  
 Der Wert des Kurvenintegrals  $|\oint_C \mathbf{V}_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}|$  beträgt: .....

**10 Punkte (2+2+2+2+2)**

3. Betrachten Sie die unbeschränkte Wärmeleitungsgleichung für  $t > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$ :

$$u_t = u_{xx}, \quad u(t=0; x) = e^x.$$

- (a) Geben Sie die Lösung für obige Gleichung an!
- (b) Machen Sie für ihre Lösung aus (a) die Probe!
- (c) Skizzieren Sie ihre Lösung aus (a) zum Zeitpunkt  $t = 1$ .

**10 Punkte (6+2+2)**

4. (a) Was versteht man unter einer „Kugelwelle“? Geben Sie die Wellengleichung für dreidimensionale Kugelwellen an!

(b) Man löse die unbeschränkte Wellengleichung für  $t > 0$  und  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ :

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad u(t=0; x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad u_t(t=0; x, y, z) = 0.$$

(c) Machen Sie für ihre Lösung aus (b) die Probe!

**10 Punkte (2+6+2)**

---