Prüfung aus Mathematik 3 für MB, VT, WI

am 13. Oktober 2017

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktion an ihren Polstellen:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - iz + 2}.$$

(b) Es bezeichne S_R den mathematisch positiv durchlaufenen Halbkreisbogen in der oberen Halbebene mit Radius R und Mittelpunkt 0. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{1}{z^2 - iz + 2}\, dz = 0.$$

(c) Formulieren Sie den Residuensatz und verwenden Sie ihn, sowie die Ergebnisse aus (a) und (b) zur Bestimmung von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2 - iz + 2}\, dx.$$

2. Gegeben sei ein Vektorraum $\mathcal{V}$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und dadurch induzierter Norm $\|\cdot\|$, sowie ein System von paarweise orthonormalen Elementen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$.
Zeigen Sie, dass für $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{V}$ stets

$$\|f - (c_1\varphi_1 + \cdots + c_m\varphi_m)\| \le \|f - (d_1\varphi_1 + \cdots + d_m\varphi_m)\|,$$

wenn

$$c_k = \langle f, \varphi_k\rangle, \qquad k = 1, \dots, m.$$

3. Gegeben sei eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deren Laplace- und Fouriertransformierte existieren.

(a) Geben Sie die Definition der Laplacetransformierten $\mathcal{L}\{f\}$ und der Fouriertransformierten $\mathcal{F}\{f\}$ von f an.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{F}\{f'\}(s) = is\mathcal{F}\{f\}(s).$$

(c) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > 1, \\ -1 & \text{für } -1 \le x \le 0, \\ 1 & \text{für } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

4. Bestimmen Sie für $0 \le x \le \pi$ und $t \ge 0$ eine Lösung des Randanfangswertproblems

$$u_t = u_{xx}, \qquad u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \qquad u(x,0) = 1 + \cos(17x).$$