**Prüfung aus Mathematik 3 für MB, VT, WI**

**am 13. Juni 2014**

ZUNAME: ........................

Vorname: ........................

Mat.Nr.: ........................

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Formulieren Sie (ausführlich) den Integralsatz von Gauß und verwenden Sie ihn, um zu beweisen, dass für Funktionen $u, v : G \to \mathbb{R}$ mit stetigen partiellen Ableitungen gilt

$$\iint\limits_F u \operatorname{grad} v \, d\boldsymbol{O} = \iiint\limits_D (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + u\Delta v)\, dxdydz,$$

wobei $F$ eine geschlossene Fläche im Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ist, die samt ihrem Innenbereich einen beschränkten, abgeschlossenen, elementaren Bereich in $G$ bildet.

(b) Gegeben sei ein elementarer Bereich $K \subseteq \mathbb{R}^3$, der von einer geschlossenen Fläche $F$ berandet sei, sowie die Wärmeleitungsgleichung mit Rand- und Anfangsbedingungen

$$\frac{\partial T}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{l}{\sigma\rho}\Delta T(\boldsymbol{x}, t), \qquad \begin{array}{ll} T(\boldsymbol{x}, t) = f(\boldsymbol{x}, t) & \text{für} \quad \boldsymbol{x} \in F,\ t \geq 0, \\ T(\boldsymbol{x}, 0) = g(\boldsymbol{x}) & \text{für} \quad \boldsymbol{x} \in K, \end{array} \tag{1}$$

wobei $f : F \times [0, \infty)$ und $g : K \to \mathbb{R}$ stetig sind.

Zeigen Sie unter Verwendung von (a), dass die Lösung von (1) *eindeutig* ist.

6 Punkte

2. Gegeben sei

$$y''(x) + \lambda\, y(x) = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y(2) = 0.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenfunktionen dieses Randwertproblems.

(b) Entwickeln Sie die auf $[0, 2]$ definierte Funktion $g(x) = 17$ nach den Eigenfunktionen des Randwertproblems.

4 Punkte

3. Gegeben sei für $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ die unbeschränkte Wellengleichung

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t).$$

Verwenden Sie die Lösungsformel von d'Alembert zur Bestimmung einer Lösung, die folgenden Anfangsbedingungen genügt

$$u(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad u_t(x, 0) = x.$$

Zeigen Sie auch durch direktes Nachrechnen, dass die von Ihnen angegebene Funktion $u(x, t)$ tatsächlich eine Lösung ist. (In anderen Worten: *Machen Sie die Probe!*)

4 Punkte

4. Bestimmen Sie für $0 \leq x \leq 2\pi$ und $t \geq 0$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$u_t = u_{xx}, \qquad u(0, t) = u(2\pi, t) = 0, \qquad u(x, 0) = \pi - |\pi - x|.$$

6 Punkte