Prüfung aus Mathematik 3 für MB und VT

am 14. Jänner 2011

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen für das Randwertproblem

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad 3y(0) + y'(0) = 3y(\pi) + y'(\pi) = 0.$$

   (b) Entwickeln Sie die auf dem Intervall $[0, \pi)$ definierte Funktion

$$f(x) = 17e^{-3x} + 7\cos x - 21\sin x$$

   nach den Eigenfunktionen des Sturm–Liouvilleschen Randwertproblems aus Beispiel (a).

2. Gegeben sei ein *ebenes* lineares Differentialgleichungssystem der Form

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}(t).$$

   Diskutieren Sie (ausführlich) die folgenden Punkte:

   - Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bei gegebenem Anfangswert
   - Verfahren zur Bestimmung einer partikulären Lösung (bei Kenntnis der homogenen Lösung)
   - Exponentialmatrizen und homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten

3. (a) Formulieren Sie den Integralsatz von Green.
   (b) Gegeben sei die Halbsphäre

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4,\ z \geq 1\}.$$

   Berechnen Sie unter Verwendung eines geeigneten Integralsatzes das Oberflächenintegral

$$\iint\limits_H \operatorname{rot} \begin{pmatrix} y \\ -x(z-1) \\ 1-z^2 \end{pmatrix} d\boldsymbol{O}.$$

4. (a) Gegeben sei die lineare partielle Differentialgleichung

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0 \tag{1}$$

   mit stetig partiell differenzierbaren Funktionen $a, b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen für eine stetig partiell differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
   (i) u ist eine Lösung von (1).
   (ii) $u(\boldsymbol{x}(t))$ ist für jede Charakteristik $\boldsymbol{x}(t)$ von (1) konstant.
   Erklären Sie alle verwendeten Begriffe und Schritte in Ihrem Beweis.
   (b) Bestimmen Sie eine möglichst allgemeine Lösung von

$$2u_x + xu_y = 0.$$